CIENCIA 21(4), 216 - 223, 2013
Maracaibo, Venezuela

Operadores llenos y aproximación del inverso en espacios de Hilbert

Wilson Rodolfo Pacheco Redondo y Carolina Yenireé Carrillo Barazarte*

Departamento de Matemáticas, Facultad Experimental de Ciencias, Universidad del Zulia. Maracaibo, Venezuela.

Recibido: 07-06-12 Aceptado: 06-12-13

Resumen

Sea H un espacio de Hilbert de dimensión infinita, dado un operador T invertible en $L(\mathrm{H})$, nosotros estudiamos condiciones para que el inverso de T pertenezca al álgebra débilmente cerrada generada por T y la identidad, es decir, para que T^{-1} se pueda aproximar por polinomios en T débilmente. En el presente trabajo damos respuestas parciales a dos problemas que fueron formulados por Bravo y Feintuch, además de presentar otros resultados de sumo interés sobre operadores llenos, y en particular las relaciones de este concepto con similaridades y operadores isométricos, compactos, casinilpotentes y de Riesz.

Palabras clave: operadores llenos, isométricos, compactos, casinilpotentes.

Full operators and approximation of inverse in Hilbert spaces

Abstract

Let be a infinite dimensional Hilbert space, given an invertible operator T in $L(\mathrm{H})$, we study condition for the inverse of T belongs to the weakly closed algebra generated by T and the identity, that is, that T^{-1} can be approximated by polynomials in weakly. In this work we give partial answers to two problems that have been formulated by Bravo and Feintuch. In addition to presenting other results of great interest for full operators, in particular the relationship of this concept with similarities, and isometrics, compacts, quasinilpotents and Riesz operators.

Keywords: full operators, isometrics, compacts, quasinilpotents.

Introducción

Como es conocido del álgebra lineal, el inverso de un operador T sobre un espacio de dimensión finita, es un polinomio en el operador, esto en general no se cumple para espacios de dimensión infinita, por esta razón se hace necesario estudiar las condiciones que debe tener un operador T invertible sobre un espacio de Hilbert de dimensión infinita, para que su inverso se aproxime por polinomios en él, o lo que es lo mismo, para que su inverso T^{-1} pertenezca al álgebra débil generada por T y la identidad, esta álgebra la denotamos por A_T.

Existen muchos resultados con respecto a este problema entre los cuales están los que utilizan la relación que existe entre $\mathrm{lat}(T)$ y $\mathrm{lat}(T^{-1})$ y también los que relacionan la exis-

* Autor para la correspondencia: wpacheco@luz.edu.ve

tencia de operadores Compactos, de Riesz y Casinilpotentes en A_T y la pertenencia de T^{-1} en esta misma álgebra. En este trabajo nos dedicamos a dar respuestas parciales a las siguientes preguntas que fueron formuladas por J. Bravo (1) y Feintuch (2), respectivamente.

1. ¿Si T es un operador invertible y A_T contiene un operador compacto inyectivo, es verdad que $T^{-1} \in A_T$?
2. ¿Si T es un operador invertible y A_T contiene un operador casinilpotente inyectivo, es verdad que $T^{-1} \in A_T$?

Comenzamos mostrando algunas de las condiciones ya conocidas que debe tener un operador invertible T para que $T^{-1} \in A_T$, entre las más resaltantes están las dadas por Sarason, Wermer y J. Bravo en (3-5, 2), respectivamente. Además, presentamos algunas caracterizaciones para operadores llenos y propiedades que se preservan por similaridad y su importancia al momento de dar respuestas a las preguntas [1] y [2], por último se obtienen algunos resultados de sumo interés que engloban todo lo ya antes mencionado dándole respuestas positivas a estas preguntas, cuando el operador T es isométrico, unitario o similar a un operador unitario.

1. Preliminares

Como es conocido del curso de álgebra lineal, si T es un operador sobre un espacio de dimensión finita, entonces él tiene un polinomio característico, el cual se escribe de la siguiente manera.

$$P_T(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Si T es invertible $a_0 = \pm det(T)$, por teorema de Hamilton-Cayley sabemos que $P_T(T) = 0$, de donde se tiene que

$$I = \frac{T\left(T^{n-1} + a_{n-1}T^{n-2} + \cdots + a_1 I\right)}{a0},$$

así

$$T^{-1} = \frac{T^{n-1} + a_{n-1}T^{n-2} + \cdots + a_1 I}{a_0}.$$

Obteniendo por tanto, el inverso del operador T como un polinomio en él, de grado $n - 1$.

Ahora bien, veremos que esto no es cierto si el espacio vectorial es de dimensión infinita, pero primero necesitamos definir el ámbito en el que actuaremos. De ahora en adelante H y K denotarán espacios de Hilbert, L(H) denotará el álgebra de todos los operadores acotados sobre H, si $T \in L(\mathrm{H})$, T^* denotará el adjunto de T.

Definición 1.1. Sea $T \in L(\mathrm{H})$, llamaremos lat(T) al conjunto de todos los subespacios cerrados invariantes para T, es decir,

$$\mathrm{lat}(T) = \{M \subseteq \mathrm{H} : TM \subseteq M\}.$$

Se verifica de inmediato que si M es un subespacio de H invariante para T, entonces

$$\mathrm{lat}(T|_M) \subset \mathrm{lat}(T).$$

Definición 1.2. Sea $T \in L(\mathrm{H})$, a la clausura en la topología débil de operadores del conjunto $\{p(T) : p \in \mathbb{C}[x]\}$, se le llama el álgebra débil generada por ***T* y la identidad** y se le denota por A_T.

Ahora bien, si R y $T \in L(\mathrm{H})$ y $R \in A_T$, entonces como R es un límite débil de polinomios en T se tiene que todo subespacio invariante para T también lo es para R, es decir,

$$\mathrm{lat}(T) \subset \mathrm{lat}(R) \text{ para todo } R \in A_T.$$

Retomando lo anterior y tomando como ejemplo al operador de desplazamiento bilátero,

$$S: l_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow l_2(\mathbb{Z}),$$

$$\left(\cdots, x_{-1}, \underline{x_0}, x_1, \cdots\right) \longrightarrow \left(\cdots, x_{-2}, \underline{x_{-1}}, x_0, \cdots\right)$$

Aquí, la posición subrayada es la que corresponde al lugar cero de la sucesión. Entonces su inverso es

$$S^{-1}: l_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow l_2(\mathbb{Z}),$$

$$\left(\cdots, x_{-1}, \underline{x_0}, x_1, \cdots\right) \longrightarrow \left(\cdots, x_0, \underline{x_1}, x_2, \cdots\right)$$

Si $M = \overline{\{(\cdots,0,0,x_0,x_1,\cdots) : x_i = 0 \text{ si } i \text{ es negativo}\}}$, entonces M es cerrado y $M \in \mathrm{lat}(S)$, luego si tomamos $x = (\cdots,0,0,\underline{1},0,\cdots) \in M$, entonces $S^{-1}(x) \notin M$, lo que implica que $M \notin \mathrm{lat}(S^{-1})$, así $S^{-1} \notin A_S$, es decir, S^{-1} no se puede aproximar por polinomios en S.

Definición 1.3. Sean H y K dos espacios de Hilbert, $U \in L(\mathrm{H,K})$ se llama **Unitario** si es invertible en $L(\mathrm{H,K})$ y $U^{-1} = U^*$.

El siguiente teorema fue probado por J. Wermer (5), más adelante daremos una demostración del mismo.

Teorema 1.4. Sea $U \in L(\mathrm{H})$ invertible y unitario, entonces $\mathrm{lat}(U) \subset \mathrm{lat}(U^{-1})$ si y sólo si la restricción de U a cualquier subespacio de dimensión infinita, no es el operador de desplazamiento bilátero S.

2. Operadores llenos

Sarason (3) prueba que si $T, R \in L(\mathrm{H})$ y T es normal, entonces $\mathrm{lat}(T) \subset \mathrm{lat}(R)$ si y sólo si $R \in A_T$.

El siguiente resultado debido a Sarason, nos da condiciones necesarias y suficientes para que $R \in A_T$.

Teorema 2.1. Sean T, $R \in L(\mathrm{H})$, entonces $R \in A_T$ si y sólo si $\mathrm{lat}(T^{(n)}) \subset \mathrm{lat}(R^{(n)})$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Aquí $T^{(n)} = T \oplus T \oplus \cdots \oplus T$, es la suma directa de n copias de T, el operador definido en $\mathrm{H}^{(n)} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{H} \oplus \cdots \oplus \mathrm{H}$, la suma directa de n copias de H.

Feintuch (2), prueba que si T es invertible y los operadores compactos de A_T son densos en A_T, entonces $T^{-1} \in A_T$. Las hipótesis de este teorema, las cumple toda contracción invertible de la clase C_0. En el mismo artículo, Feintuch hace la siguiente pregunta:

Problema 2.2. ¿Si T es invertible y A_T contiene un operador compacto inyectivo, es verdad que $T^{-1} \in A_T$?

Definición 2.3. Un operador T que satisface $\overline{TM} = M$, para todo $M \in \mathrm{lat}(T)$, se llama operador **lleno**.

Definición 2.4. Un operador $T \in L(\mathrm{H})$ se dice **acotado por abajo** si existe un número real $k>0$ tal que $\|Tx\| \geq k\|x\|$ para todo $x \in \mathrm{H}$.

Si suponemos que $T^{-1} \in A_T$, entonces todo subespacio invariante para T, también es invariante para T^{-1}, lo que implica que $TM = M$, para todo $M \in \mathrm{lat}(T)$, y por tanto T debe ser lleno.

Teorema 2.5. Sea $T \in L(\mathrm{H})$, lleno, si $M \in \mathrm{lat}(T)$, entonces $T|_M$ es lleno.

Demostración: Supongamos que $T|_M$ no es lleno, entonces por definición existe $N \in \mathrm{lat}(T|_M)$ tal que, $\overline{T|_M(N)} \subsetneq N$, luego como $\mathrm{lat}(T|_M) \subset \mathrm{lat}(T)$, se tiene que $\overline{T(N)} \subsetneq N$, lo que implica que no es lleno, contradiciendo nuestra hipótesis. ■

Sea $x \in \mathrm{H}$, y $T \in L(\mathrm{H})$; para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $M(n,x,T)$ denotará la clausura del subespacio T-cíclico generado por $T^n x$, notar que si n > 0, entonces $M(n,x,T) = \overline{T(M(n-1,x,T))}$.

Lema 2.6. Sea $T \in L(\mathrm{H})$ y $M \in \mathrm{lat}(T)$ tal que, $\overline{T(M)} \subsetneq M$, entonces existe $x \in M$ con $||x|| = 1$ tal que, $x \in M(1,x,T)^{\perp}$. Si además T es acotado por abajo, entonces $T^{n-1}x \notin M(n,x,T)$, en particular $\dim M(n,x,T) = \infty$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demostración: Como $\overline{T(M)} \subsetneq M$, entonces sea $x \in M \cap TM^{\perp}$, con $||x|| = 1n$, como $M(1,x,T) \subset TM$ se tiene $TM^{\perp} \subset M(1,x,T)^{\perp}$, por tanto $x \in M(1,x,T)^{\perp}$. Por otro lado, si T es acotado por abajo y suponemos que $T^{n-1}x \in M(n,x,T)$, entonces existe una red de polinomios con coeficientes complejos $\{p_a\}$ tal que, $\lim_a p_\alpha(T^n x) = T^{n-1}x$, y como $T^n x = T^{n-1}q_\alpha(T)$

x, entonces $\lim_a T^{n-1}(x - q_\alpha(T)x) = \vec{0}$, luego, $\lim_a x - q_\alpha(T)x = \vec{0}$, pues T es acotado por abajo, así $x \in M(1,x,T)$, contradiciendo el hecho de que $x \in M(1,x,T)^\perp$ por lo tanto $T^{n-1}x \notin M(n,x,T)$.

Teorema 2.7. Sea $T \in L(\mathrm{H})$, acotado por abajo las siguientes proposiciones son equivalentes:

a. T es lleno.

b. Si $x \in M(1,x,T)^\perp$, entonces x = $\vec{0}$.

Demostración: b. implica a, Suponer que T no es lleno, es decir, existe $M \in \mathrm{lat}(T)$ tal que, $TM \subsetneq M$. Así por lema 2.6, existe $x \in M$ con $||x|| = 1$ tal que $x \in M(1,x,T)^\perp$, lo que contradice b.

a. implica b. Suponer que existe x $\neq \vec{0}$, tal que $x \in M(1,x,T)^\perp$, luego $x \notin M(1,x,T) = TM(0,x,T)$ con lo que $TM(0,x,T) \subsetneq M(0,x,T)$, y por tanto T no es lleno, contradiciendo la hipótesis. ■

Teorema 2.8. Sea $T \in L(\mathrm{H})$ no lleno si y sólo si, existen $x,y \in H$ tal que $\langle T^n x, y\rangle = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\langle x, y\rangle \neq 0$.

Demostración: Suponer que T no es lleno, entonces existe $x \neq \vec{0}$, tal que $\langle T^n x, x\rangle = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, por teorema 2.7 y al hacer $x = y$, obtenemos el resultado requerido.

Recíprocamente sea $\varphi_y : \mathrm{H} \to \mathbb{C}$, definida de la siguiente manera: $\varphi_y(x) = \langle x, y\rangle$

Luego al tomar $M = M(0,x,T)$ tenemos que $TM \subseteq Ker\varphi_y$, pues $\langle T^n x, y\rangle = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ por hipótesis, como $x \notin Ker\varphi_y$ pues $\langle x, y\rangle \neq 0$, entonces $\overline{TM} \subset M$ por lo tanto T no es lleno. ■

Teorema 2.9. Sea $T \in L(\mathrm{H})$ invertible, entonces T es lleno si y sólo si $\mathrm{lat}(T) \subset \mathrm{lat}(T^{-1})$.

Demostración: $\Rightarrow$) Sea T lleno y dado que T transforma conjuntos cerrados en conjuntos cerrados por ser invertible, se tiene que $TM = M$ para todo $M \in \mathrm{lat}(T)$, luego $M = T^{-1}M$.

Así, $M \in \mathrm{lat}(T^{-1})$, para todo $M \in \mathrm{lat}(T)$, y por tanto $\mathrm{lat}(T) \subset \mathrm{lat}(T^{-1})$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\mathrm{lat}(T) \subset \mathrm{lat}(T^{-1})$, luego $TM \subseteq M$ y $T^{-1}M \subseteq M$ para todo $M \in \mathrm{lat}(T)$, lo que implica que $TM = M$, para todo $M \in \mathrm{lat}(T)$, y por lo tanto T es lleno. ■

Como consecuencia de este teorema tenemos que el teorema de Sarason en el caso particular de T y T^{-1} puede reescribirse de la siguiente manera:

Teorema 2.10. Sea $T \in L(\mathrm{H})$ normal, entonces T es lleno si y sólo si $T^{-1} \in A_T$.

Y por tanto se tiene lo siguiente:

Teorema 2.11. Sea $T \in L(\mathrm{H})$ unitario, entonces T es lleno si y sólo si $\mathrm{T}^{-1} \in A_T$.

En su tesis doctoral, J. Bravo (1) estudia condiciones para que T^{-1} pertenezca al álgebra débil generada por T y la identidad caracterizando a los operadores llenos, y entre sus resultados mas importantes están los siguientes teoremas.

Teorema 2.12. Sea H un espacio de Hilbert y $T \in L(\mathrm{H})$ invertible, si $T^{(n)}$ es lleno, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $T^{-1} \in A_T$.

Teorema 2.13. Sea H un espacio de Hilbert y $T \in L(\mathrm{H})$, invertible y supongamos que A_T contiene un operador Q casinilpotente, si $\mathrm{lat}(T)$ es no trivial, entonces $\mathrm{lat}(T) \cap \mathrm{lat}(T^{-1})$ es no trivial.

Debido a este teorema y al problema (1) que se plantea Feintuch (2), J. Bravo hace la siguiente pregunta:

Problema 2.14 ¿Si T es invertible y A_T contiene un operador Q inyectivo casinilpotente, implica que $T^{-1} \in A_T$?

3. Resultados

Definición 3.1. Si H y K son dos espacios de Hilbert, tal que $T \in L(\mathrm{H})$ y $U \in L(\mathrm{K})$, entonces T y R se llaman **similares**, si hay un operador invertible $P \in L(\mathrm{K,H})$ tal que $PRP^{-1} = T$.

Teorema 3.2. Sea $T \in L(\mathrm{H})$ similar a un operador $U \in L(\mathrm{K})$, entonces T no es lleno, si y sólo si U no es lleno.

Demostración: Dado que la similaridad es simétrica sólo basta ver una dirección. Si T no es lleno, entonces existen $x,y \in H$, con $\langle x,y\rangle \neq 0$, tal que $\langle T^n x,y\rangle = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, como T es similar a U, entonces hay un operador invertible $P \in L(\mathrm{K},\mathrm{H})$ tal que $PUP^{-1} = T$, así $T^n = (PUP^{-1})^n = PU^nP^{-1}$, es decir, T^n es similar a U^n, luego,

$$0 = \langle T^n\ x,y\rangle_{\mathrm{H}} = \langle PU^n P^{-1}\ x,y\rangle_{\mathrm{H}}) = \langle U^n P^{-1}\ x,P^*y\rangle_{\mathrm{K}},$$

Haciendo $u = P^{-1}x$ y $v = P^*y$, obtenemos:

$$\langle U^n u\ ,v\rangle_{\mathrm{K}} = 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, y además,

$$\langle u\ ,v\rangle_{\mathrm{K}} = \langle P^{-1}x,P^*y\rangle_{\mathrm{K}} = \langle PP^{-1}x,y\rangle_{\mathrm{H}} = \langle x,y\rangle_{\mathrm{H}}\ \neq 0,$$

así, existen $u,v \in \mathrm{K}$ con $\langle u\ ,v\rangle_{\mathrm{K}}\ \neq 0$ tal que, $\langle U^n u\ ,v\rangle_{\mathrm{K}} = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Y por tanto U no es lleno. ■

Como consecuencia de este teorema tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.3. Sea $T \in L(\mathrm{H})$ similar a un operador $U \in L(\mathrm{K})$, entonces T es lleno, si y sólo si U es lleno.

Este resultado, es muy importante ya que nos dice que la clase de operadores llenos no distingue entre operadores similares. A continuación veremos que los operadores similares también preservan límites débiles.

Teorema 3.4. Sean $T,U \in L(\mathrm{H})$ y sea $R \in A_T$, si T es similar a U, es decir $PUP^{-1} = T$ para algún A invertible en $L(\mathrm{H})$, entonces $P^{-1}RP \in A_U$.

Demostración: Supongamos que $R \in A_T$ es decir R se puede aproximar débilmente por polinomios en T y sea $\{p_a\}$ una red de polinomios tal que,

$$\langle Rx,y\ \rangle = \lim_\alpha \langle p_\alpha\ (T\ )x,y\rangle,$$

para todo x,y en H, como $PUP^{-1} = T$, sustituyendo en la ecuación anterior se tiene

$$\langle Rx,y\ \rangle = \lim_\alpha \langle p_\alpha\ (PUP^{-1}\ )x,y\rangle = \lim_\alpha \langle Pp_\alpha\ (U\ )P^{-1}x,y\rangle.$$

De donde,

$$\langle Rx,y\ \rangle = \lim_\alpha \langle p_\alpha\ (U\ )P^{-1}x,P^*y\rangle$$

para todo $x,y \in \mathrm{H}$, tomando $x = Pv$ y $y = (P^*)^{-1}u$.

Luego,

$$\langle P^{-1}RPv,u\rangle = \langle RPv,(P^*)^{-1}u\ \rangle = \lim_\alpha \langle p_\alpha\ (U\ )u,v\rangle,$$

así, $P^{-1}RP$ se puede aproximar débilmente por ´polinomios en U, es decir $P^{-1}RP \in A_U$. ■

Notar que si R es compacto e inyectivo, entonces $P^{-1}RP$ es compacto y además inyectivo, por lo tanto, si T es similar a U y A_T contiene un operador compacto inyectivo, entonces A_U también contiene un operador compacto inyectivo. Análogamente, si T es similar a U y A_T contiene un operador casinilpotente inyectivo, entonces A_U también contiene un operador casinilpotente inyectivo, pues si $\sigma(R) = \{0\}$, entonces $\sigma\left(P^{-1}RP\right)=\{0\}$.

Si suponemos ahora que T es invertible y que $T^{-1} \in A_{T,}$ entonces por lo ya establecido se tiene que

$$U^{-1} = P^{-1}\ (PU^{-1}P^{-1})P = P^{-1}T^{-1}P \in A_U,$$

y por tanto hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 3.5. Sea $T \in L(\mathrm{H})$ invertible, con T similar a un operador $U \in L(\mathrm{H})$, entonces $T^{-1} \in A_T$ si y sólo si $U^{-1} \in A_U$.

Una consecuencia del teorema 3.5 y del hecho de que las hipótesis de los problemas (2.2) y (2.14) también se preservan entre operadores similares, es que se puede restringir el estudio de estos mismos problemas al caso T unitario, más aún, daremos respuestas positivas a estos problemas cuando T es un operador isométrico, lo cual es de sumo interés pues esta hipótesis es mucho más débil, que el hecho de ser el operador T unitario.

Además, veremos al estudiar los operadores isométricos que podemos dar condiciones para su invertibilidad, y verificar así cuando su inverso pueda ser aproximado por polinomios en él.

Sea $T \in L(\mathrm{H})$ un operador isométrico, es decir, $||Tx|| = ||x||$, para todo $x \in \mathrm{H}$, entonces T es acotado por abajo, si T es lleno entonces $TM = M$, para todo $M \in \mathrm{lat}(T)$, en particular $T\mathrm{H} = \mathrm{H}$, así T tiene rango denso y por tanto T es invertible, luego T es unitario lo que implica que $T^{-1} \in A_T$ por teorema 2.11. En consecuencia hemos demostrado lo siguiente.

Teorema 3.6. Sea $T \in L(\mathrm{H})$ isométrico y lleno, entonces T es invertible y $T^{-1} \in A_T$.

En lo que sigue daremos condiciones para que un operador isométrico sea lleno y por ende que su inverso pertenezca al álgebra débil generada por T. Para ello necesitaremos algunos resultados preliminares.

Lema 3.7. Sea $T \in L(\mathrm{H})$, isométrico y no lleno, entonces existe $x \in \mathrm{H}$, , $||x|| = 1$ tal que $x \in M(1,x,T)^{\perp}$ y si $M = M(0,x,T)$, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Tn(M) = \{\vec{0}\}$.

Demostración: Veamos que $\{x,Tx,T^2x,\ldots,T^nx,\ldots\}$ es una base ortonormal de M.

Primero, $\{x,Tx,T^2x,\ldots,T^nx,\ldots\}$ es un conjunto ortonormal, pues por hipótesis $\langle T^n x, x\rangle = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. entonces $0 = \langle T^{n-m} x, x\rangle = \langle T^n x, T^m x\rangle$, para todo $n,m \in \mathbb{N}$ con $m < n$, y como T es isométrico, T^n también lo es, para todo $n \in \mathbb{N}$. Así

$$\|T^n x\|^2 = \langle T^n x, T^n x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2 = 1.$$

Lo que implica que $||T^n x|| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Segundo, Notar que M es la clausura del subespacio generado por $\{x,Tx,T^2x,\ldots,T^nx,\ldots\}$.

Por lo tanto, $\{x,Tx,T^2x,\ldots,T^nx,\ldots\}$ es una base ortonormal para M. Ahora bien, supongamos que $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T^n(M)$ con $y \neq \vec{0}$ y como $y \in M$, $y = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle y, T^k x\rangle T^k x$.

Luego, sea l el menor k en $\mathbb{N}$ tal que $\langle y, T^k x\rangle \neq 0$, así, $y = \sum_{k=l}^{\infty} \langle y, T^k x\rangle T^k x$ con $\langle y, T^l x\rangle \neq 0$ y $y \in T^l(M)$. Además, como $y \in T^{l+1}(M)$, y $\{T^{l+1}x, T^{l+2}x,\ldots,T^nx,\ldots\}$ es una base ortonormal para $T^{l+1}(M)$, obtenemos, $y = \sum_{k=l+1}^{\infty} \langle y, T^k x\rangle T^k x$ comparando con la escritura anterior de y se tiene, $\langle y, T^l x\rangle \neq 0$. Contradiciendo lo establecido anteriormente, por tanto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T^n(M) = \{\vec{0}\}$. ■

Recordemos que el operador de desplazamiento unilateral a derecha se define por

$$S: l_2(\mathbb{Z}^+) \longrightarrow l_2(\mathbb{Z}^+), (x_0 x_1, \cdots) \longrightarrow (0, x_0, x_1, \cdots).$$

La prueba del lema 3.7 nos dice que si T es isométrico y no lleno, T restringido a M es exactamente S, el operador de desplazamiento unilateral a derecha en la base ortonormal $\{x,Tx,T^2x,\ldots,T^nx,\ldots\}$.

Además, si T es unitario, entonces también es una base ortonormal el conjunto $\beta = \{\ldots,T^{-n}x,\ldots,T^{-2}x,T^{*1}x,x,Tx,T^2x,\ldots,T^nx,\ldots\}$, y al restringir T al subespacio generado por β, nos queda el operador de desplazamiento bilátero en la base ortonormal β, con lo que tenemos como corolario el teorema de Wermer.

Lema 3.8. Sea H un de Hilbert, sea $T \in L(\mathrm{H})$ acotado por abajo y M un subespacio invariante para T tal que, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T^n(M) = \{\vec{0}\}$, entonces T no tiene vectores propios en M. En particular T no tiene subespacios invariantes de dimensión finita en M.

Demostración: Supongamos que $y \in M$, con $y \neq 0$ vector propio de T, es decir, $Ty = ly$ para algún $l \in \mathbb{C} - \{0\}$ (pues T es acotado por abajo), luego para todo $n \in \mathbb{N}$, así y

$\in T^n(M)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\bigcap_{n\in \mathbb{N}} T^n(M) = \{\vec{0}\}$ contradiciendo la hipótesis, por lo tanto T no tiene vectores propios. ■

Denotaremos por alglat(T), al conjunto de todos los operadores $R \in L(\mathrm{H})$ que satisfacen que $RM \subset M$ para todo $M \in \mathrm{lat}(T)$, y por $\{T\}'$ al **conmutante** de T; es decir, $\{T\}' = \{R \in L(\mathrm{H})$; tal que $RT = TR\}$.

Teorema 3.9. Sea $T \in L(\mathrm{H})$ isométrico y suponer que alglat(T) contiene un operador Q casinilpotente lleno, entonces T es invertible y $T^{-1} \in A_T$.

Demostración: Por ser T isométrico y como consecuencia del teorema 3.6, solo basta probar que T es lleno. Supongamos que T no es lleno, entonces existe $x \in \mathrm{H}$, $||x|| = 1$ tal que $x \in M(1,x,T)^{\perp}$. Ya que $M(0,x,T) = [x] \oplus M(1,x,T)$ y como $M(0,x,T) \in \mathrm{lat}(T)$, se tiene que, , donde $y \in M(1,x,T)$. Así para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que, , donde $y_n \in M(1,x,T)$.

Luego,

$$|\alpha| = |\langle \alpha^n x + y_n\ , x\rangle|^{\frac{1}{n}} = |\langle Q^n x, x\rangle|^{\frac{1}{n}} \le \|Q^n\|^{\frac{1}{n}},$$

y como Q es casinilpotente, implica que $\alpha = 0$, de donde, $\langle Q^n x, x\rangle = 0$.

Así, por teorema 2.7, Q no es lleno, contradiciendo nuestra hipótesis. ■

Teorema 3.10. Sea $T \in L(\mathrm{H})$ isométrico y suponer alglat(T) $\cap \{T\}'$ contiene un operador de Riesz R lleno, entonces T es invertible y $T^{-1} \in A_T$.

Demostración: Sólo basta probar que T es lleno. Para ello supongamos lo contrario, es decir, sea T no lleno, luego como él es isométrico, se tiene por lema 3.7 que $\bigcap_{n\in \mathbb{N}} T^n(M) = \{\vec{0}\}$, donde $M = M(0,x,T)$ y $x \in \mathrm{H}$, $||x|| = 1$ tal que $\langle T^n x, x\rangle = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, además T no subespacios invariantes de dimensión finita en M, por lema 3.8.

Por otro lado, notar que $T|_M$ no es lleno y si $R_1 = R|_M$, entonces R_1 es también Riesz, lleno y $R_1 \in$ alglat$(T|_M) \cap \{T|_M\}'$.

Si $\sigma(R_1) \neq \{0\}$ implica que R_1 es casinilpotente y al aplicar el teorema anterior, se tiene que $T|_M$ es lleno, en contradicción a lo dicho anteriormente.

Por tanto, $\sigma(R_1) \neq \{0\}$, es decir, R_1 tiene un valor propio, digamos $\lambda \neq 0$, y además, $\ker(R_1 - \lambda)$ es un subespacio hiperinvariante de dimensión finita en M para R_1. Luego como $R_1 \in \{T|_M\}'$ se tiene que $\ker(R_1 - \lambda)$ es invariante para $T|_M$ y por tanto invariante para T, lo que es una contradicción. Por lo tanto T debe ser lleno. ■

Corolario 3.11. Sea $T \in L(\mathrm{H})$ isométrico y suponer alglat(T) $\cap \{T\}'$ contiene un operador compacto lleno, entonces T es invertible y $T^{-1} \in A_T$.

Demostración: Como todo operador compacto es de Riesz, aplicamos el teorema anterior, obteniendo el resultado requerido. ■

Teorema 3.12. Sea $T \in L(\mathrm{H})$, isométrico y supongamos que A_T contiene un operador Q casinilpotente inyectivo, entonces T es invertible y $T^{-1} \in A_T$.

Demostración: Es suficiente probar que T es lleno. Para ello supongamos que no lo es, y sean x y M como en el lema 3.7, así $\bigcap_{n\in \mathbb{N}} T^n(M) = \{\vec{0}\}$, como Q es inyectivo, $QM \neq \{0\}$. Sea k el mayor entero tal que, $QM \subset T^k(M)$.

Ahora bien, como $\{x, Tx, T^2x, \ldots, T^n x, \ldots\}$ es una base ortonormal para M, tenemos, $Qx = bT^k x + w_{k+1}$, donde $w_{k+1} \in T^{k+1}(M)$.

En general

$$Q^n x = \beta^n T^{nk} x + w_{nk+1},$$

donde $w_{nk+1} \in T^{nk+1}(M)$. Notar que por la escogencia de k se tiene que $\beta = 0$ (pues $\beta = 0$ implica que $QM \subset T^{k+1}(M)$. Luego,

$$\|Q^n\| \ge \|Q^n x\| \ge \|\beta^n T^{nk} x\| = |\beta^n|.$$

lo que implica

$$\|Q^n\|^{1/n} \ge |\beta|.$$

Entonces, dado que Q es casinilpotente $\beta = 0$, contradiciendo lo antes mencionado. Así, T debe ser lleno. ■

Teorema 3.13. Sea $T \in L(\mathrm{H})$ isométrico y supongamos que A_T contiene un operador de Riesz inyectivo R, entonces T es invertible y $T^{-1} \in A_T$.

Demostración: Es suficiente probar que T es lleno. Para ello supongamos que no lo es, entonces usando el mismo razonamiento que en el teorema anterior, se tiene que T no tiene subespacios invariantes de dimensión finita en $M = M(0,x,T)$.

Ahora bien, si $R_1 = R|_M$, entonces R_1 es inyectivo y $R_1 \in A_{T|_M}$. El resto de la demostración es la misma que la del teorema 3.10. ■

Corolario 3.14. Sea $T \in L(\mathrm{H})$ isométrico y suponer contiene un operador compacto C inyectivo, entonces T es invertible y $T^{-1} \in A_T$.

Si $T \in L(\mathrm{H})$, es similar a un operador unitario $U \in L(\mathrm{H})$, y si A_T contiene un operador compacto C inyectivo o un operador Q casinilpotente inyectivo, entonces A_U contiene un operador compacto C_1 inyectivo o un operador Q_1 casinilpotente inyectivo respectivamente, entonces por teoremas 3.12 y 3.13, $U^{-1} \in A_U$ y por teorema 3.5 obtenemos que $T^{-1} \in A_T$.

4. Conclusión

Si $T \in L(\mathrm{H})$, es similar a un operador unitario $U \in L(\mathrm{H})$, y si A_T contiene un operador compacto K inyectivo o un operador Q casinilpotente inyectivo, hemos probado en este trabajo que A_U contiene un operador compacto C_1 inyectivo, un operador Q_1 casinilpotente inyectivo respectivamente y en consecuencia $U^{-1} \in A_U$ y $T^{-1} \in A_T$. De esta manera en este trabajo se les dan respuestas positivas a los problemas (1) y (2) para operadores similares a unitarios, unitarios e isométricos.

Por último hacemos mención que estos problemas han sido resueltos por W. R. Pacheco (6), en ese artículo se usa fuertemente la hipótesis de invertibilidad del operador T, y sus resultados están basados en que T y T^{-1} no tienen subespacios invariantes de dimensión finita comunes, lo que verifica al estudiar las compresiones de dicho operador a subespacios semi-invariantes. Nosotros en este trabajo damos respuestas parciales a los mismos problemas usando argumentos más sencillos que los que aparecen en (6), además de dar condiciones para la invertibilidad del operador, partiendo sólo de un operador isométrico.

Referencias bibliográficas

1. BRAVO J, Ph. D. University of California, Berkeley 1980.
2. FEINTUCH A. ***Proc Amer Math Soc*** 63: 66-68. 1977.
3. SARASON D. ***The Hp spaces of an annulus***, Mem. Amer. Math. Soc 56. 1965.
4. SARASON D. ***Pac J of Math*** 17(3): 511-517. 1966.
5. WERMER J. ***Proc Amer Math Soc.*** (3): 270-277. 1952.
6. PACHECO W. ***Extracta Math*** 24(3): 259-264. 2009.