

# Ondas con polarización circular en plasmas con campo magnético uniforme y dos tipos de granos\*

*Pablo Martín<sup>1\*\*</sup>, Enrique Castro<sup>1</sup> y Eder Valdeblanquez<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Universidad Simón Bolívar, Departamento de Física, Apdo. 89000, Caracas 1080A, Venezuela. <sup>2</sup>Universidad del Zulia, Facultad de Ingeniería, Departamento de Física, Ciclo Básico, Apdo. 4011 A-526, Edo. Zulia, Venezuela.

Recibido: 30-11-05      Aceptado: 10-04-06

## Resumen

La ecuación de dispersión de ondas circularmente polarizadas se ha encontrado para plasmas con polvo y dos especies de granos. Se asume que las ondas se propagan en un campo magnético uniforme. Se asume el plasma distribuido uniformemente cuando no hay perturbación. El análisis de la ecuación de dispersión es más complicado que en el caso de una especie de grano porque el grado de la ecuación de dispersión es más alto. Hay también más frecuencias de resonancia que en el caso de un tipo de grano. Se pueden hacer algunas simplificaciones para algunos casos especiales, los cuales son presentados aquí. Se presentan los cálculos numéricos para dos tipos de granos con diámetros diez veces mayores uno respecto al otro.

**Palabras clave:** Plasmas con polvo, ondas electromagnéticas circularmente polarizadas.

## Bi-dust circularly polarized waves in uniform magnetoplasmas

### Abstract

Here the dispersion relation of circularly polarized waves has been derived for dusty plasmas with two kinds of grains. The waves are assumed to propagate along a uniform magnetic field. The plasma is assumed to be uniform when there is not perturbation. The analysis of this dispersion relation becomes more complicated than in the one grain specie, because the degree of the dispersion relation is now higher. There are also more resonance frequencies than in the one dust case. The solutions of the dispersion relation depend of the frequency range to be considered. Some simplifications can be obtained for special case and they are presented here. Numerical calculations are presented for two kind of grains with diameters ten times larger one with respect to the other.

**Key words:** Dusty plasmas, circularly polarized electromagnetic waves.

\* Trabajo presentado en el V Congreso de la Sociedad Venezolana de Física, Universidad del Zulia. Nucleo Punto Fijo - Edo. Falcón, Venezuela, Noviembre 2005.

\*\* Autor para la correspondencia. E-mail: pmartin@usb.ve

### Introducción

En el presente trabajo se estudia la propagación de ondas circularmente polarizadas, en plasmas con dos tipos de grano, en un campo magnético uniforme en la región de bajas frecuencias, comparadas con la frecuencia ciclotrónica de los iones  $\omega_{ci}$ .

Para el tipo de ondas, aquí consideradas, el tratamiento a seguir será el de considerar al plasma como si estuviera formado por varios fluidos, ya que dicho tratamiento es en este caso adecuado, y permite obtener una buena información, el cual puede ser perfeccionado posteriormente con tratamientos más sofisticados. Los efectos de temperatura serán tomados en cuenta en futuras publicaciones. Nuestro análisis en el presente trabajo es para plasmas fríos. Plasmas con dos especies de grano han recibido interés recientemente tanto del punto de vista industrial como en astrofísica [1-3].

### Tratamiento Teórico

Para estas ondas el campo magnético exterior se considera uniforme y en la dirección z. La propagación es también a lo largo de esta coordenada. Para ondas circularmente polarizadas a la derecha el campo eléctrico está dado por [4]

$$\vec{E}(z, t) = E_{\perp}(z, t)(\hat{x} + i \hat{y}). \quad [1]$$

En el presente tratamiento consideraremos las ecuaciones de momento y continuidad para los 4 fluidos cargados: 2 especies de polvo cargado, iones y electrones. El segundo tipo de grano lo diferenciaremos del principal usando una tilde para todas sus variables. De manera que una vez linerizadas las ecuaciones de propagación de ondas, tenemos

$$m_d \frac{\partial \vec{v}_d}{\partial t} = -Z_d e (\vec{E} + \frac{\vec{v}_d \times \vec{B}}{c}); \quad \frac{\partial n_d}{\partial t} + n_{d0} \nabla \cdot \vec{v}_d = 0, \quad [2]$$

$$\tilde{m}_d \frac{\partial \tilde{\vec{v}}_d}{\partial t} = -\tilde{Z}_d e (\vec{E} + \frac{\tilde{\vec{v}}_d \times \vec{B}}{c}); \quad \frac{\partial \tilde{n}_d}{\partial t} + \tilde{n}_{d0} \nabla \cdot \tilde{\vec{v}}_d = 0, \quad [3]$$

$$m_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = -Z_i e (\vec{E} + \frac{\vec{v}_i \times \vec{B}}{c}); \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + n_{i0} \nabla \cdot \vec{v}_i = 0, \quad [4]$$

$$m_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = -e (\vec{E} + \frac{\vec{v}_e \times \vec{B}}{c}); \quad \frac{\partial n_e}{\partial t} + n_{e0} \nabla \cdot \vec{v}_e = 0, \quad [5]$$

Tomamos además en cuenta la ecuación de electroneutralidad cuando no hay ondas

$$Z_i n_{i0} - n_{e0} - Z_d n_{d0} - \tilde{Z}_d \tilde{n}_{d0} = 0 \quad [6]$$

conjuntamente con las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad [7]$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi e}{c} (Z_i n_i \vec{v}_i - n_e \vec{v}_e - Z_d n_d \vec{v}_d - \tilde{Z}_d \tilde{n}_d \tilde{\vec{v}}_e) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad [8]$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad [9]$$

El índice "0" significa condiciones de equilibrio y las variables sin ese subíndice son las cantidades perturbadas. Haciendo un análisis de Fourier para estas ecuaciones, o equivalentemente, considerando que todas las variables tienen el factor  $e^{i(kz - \omega t)}$  se obtiene a la ecuación de dispersión

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega \omega_{ce}} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega_{ci} + \omega)} + \frac{\omega_{pd}^2}{\omega(\omega_{cd} - \omega)} + \frac{\tilde{\omega}_{pd}^2}{\omega(\tilde{\omega}_{cd} - \omega)} \quad [10]$$

En la anterior ecuación hemos introducido respectivamente las frecuencias ciclotrónicas de los electrones, iones, grano principal y segundo grano  $\omega_{ce}, \omega_{ci}, \omega_{cd}$  y  $\tilde{\omega}_{cd}$  así como también las frecuencias de plasma correspondientes a cada especie  $\omega_{pe}, \omega_{pi}, \omega_{pd}$  y  $\tilde{\omega}_{pd}$

$$\omega_{ce} = \frac{e B_0}{c m_e}, \quad \omega_{ci} = \frac{Z_i e B_0}{c m_i},$$

$$\omega_{cd} = \frac{Z_d e B_0}{c m_d}, \quad \tilde{\omega}_{cd} = \frac{\tilde{Z}_d e B_0}{c \tilde{m}_d} \quad [11]$$

$$\omega_{cd}^2 = \frac{4\pi n_{e0} e^2}{m_e}, \quad \omega_{pi}^2 = \frac{4\pi n_{i0} Z_i^2 e^2}{m_i} \quad [12]$$

$$\omega_{pd}^2 = \frac{4\pi n_{d0} Z_d^2 e^2}{m_d}, \quad \tilde{\omega}_{pd}^2 = \frac{4\pi \tilde{n}_{d0} \tilde{Z}_d^2 e^2}{\tilde{m}_d} \quad [13]$$

Puesto que estamos en ondas de baja frecuencia con respecto a  $\omega_{ci}$ , ( $\omega < \omega_{ci}$ ) en el segundo término de la derecha de la ecuación de dispersión [10] se ha reemplazado  $(\omega_{ce} - \omega)$  por  $\omega_{ce}$ . Es además conveniente introducir los factores  $\eta$  y  $\gamma$  definidos como

$$\eta = \frac{\tilde{\omega}_{pd}^2}{\omega_{pd}^2} = \frac{\tilde{n}_{d0} Z_d^2 m_d}{n_d Z_d^2 \tilde{m}_d} \quad [14]$$

$$\gamma = \frac{\tilde{\omega}_{cd}}{\omega_{cd}} = \frac{\tilde{Z}_d m_d}{Z_d \tilde{m}_d} \quad [15]$$

De esta manera, la ecuación de dispersión anterior puede escribirse como

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega \omega_{ce}} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega_{ci} + \omega)} + \frac{\omega_{pd}^2}{\omega(\gamma \omega_{cd} - \omega)}. \quad [16]$$

Es conveniente normalizar las frecuencias con  $\omega_{ci}$  de manera que se obtiene

$$\frac{c^2}{v_\phi^2} = 1 + \frac{\Omega_{pe}^2}{\Omega} - \frac{\Omega_{pi}^2}{\Omega(1 + \Omega)} + \frac{\Omega_{pd}^2}{\Omega(\Omega_{cd} - \Omega)} + \frac{\eta \Omega_{pd}^2}{\Omega(\gamma \Omega_{cd} - \Omega)} \quad [17]$$

donde todos los nuevos  $\Omega$  son cantidades adimensionales y están definidos como

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_{ci}}, \quad \Omega_{cd} = \frac{\omega_{cd}}{\omega_{ci}} = \frac{m_i Z_d}{m_d Z_i},$$

$$\Omega_{pe}^2 = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ci} \omega_{ce}} = \frac{c^2 n_{e0}}{v_A^2 Z_i n_{i0}} \quad [18]$$

$$\Omega_{pi}^2 = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} = \frac{c^2}{v_A^2},$$

$$\Omega_{pd}^2 = \frac{\omega_{pd}^2}{\omega_{ci}^2} = \frac{c^2}{v_A^2} \left( \frac{m_i Z_d}{m_d Z_i} \right)^2 = \frac{c^2}{v_A^2} \Omega_{cd}^2 \quad [19]$$

por conveniencia se usan las velocidades de Alfvén  $v_A$  y  $v_{DA}$  dadas como

$$v_A^2 = \frac{B_0^2}{4\pi n_{i0} m_i} m, \quad v_{DA}^2 = \frac{B_0^2}{4\pi n_{d0} m_d} \quad [20]$$

La evaluación numérica de la ecuación de dispersión se realiza una vez que los parámetros  $\eta$  y  $\gamma$  sean dados, los cuales dependen de la concentración y tamaño de cada grano.

## Discusión y conclusiones

Para el análisis gráfico tomamos como ordenadas al cuadrado del inverso de la velocidad de fase  $v_\phi$  adimensionalizada con la velocidad de la luz  $c$ . Como abscisa tomaremos la frecuencia adimensional de la onda.

Del análisis de la ecuación de dispersión, se encontró cómo era de esperarse la aparición de una frecuencia de resonancia adicional. Sin embargo, además de esta resonancia esperada, también aparece un "cutoff" adicional situado entre las frecuencias ciclotrónicas de los dos granos, como podemos observar en las figuras 1, 2 y 3.

El segundo "cutoff" que existe también cuando solo hay una especie de polvo presente, está situado entre las frecuencias ciclotrónicas del ión y del grano con mayor frecuencia ciclotrónica. Aunque dicho "cutoff" existe cuando solo un grano está presente [4], sin embargo, su posición cambia por efecto del segundo grano. Su estudio no se incluye en el presente trabajo por que en este caso el efecto de  $\omega_{ce}$  no puede despreciarse y sería necesario utilizar una ecuación de dispersión mas completa.

En nuestro análisis, el "cutoff" de baja frecuencia, al aumentar la densidad del segundo grano, se desplaza de la región cercana a la frecuencia de la primera especie granular a la correspondiente a la segunda especie.

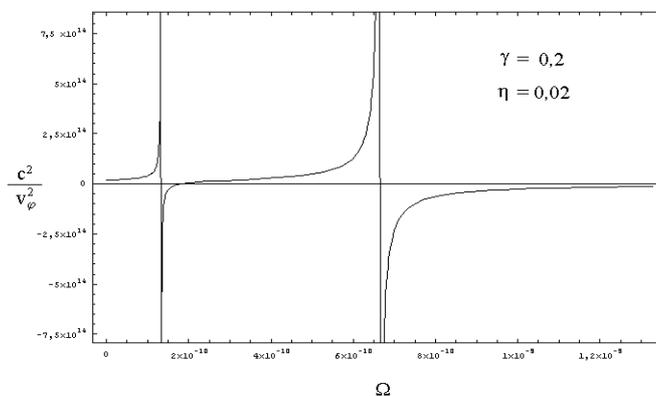


Figura 1. Cuadrado del inverso de la velocidad de fase adimensional versus la frecuencia adimensional para  $\gamma = 0,2$  y  $\eta = 0,02$ .

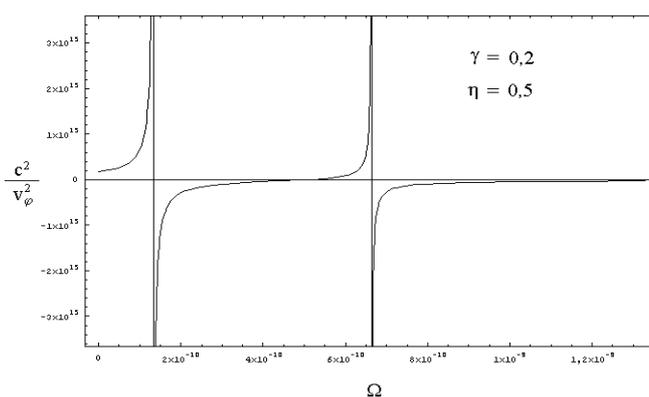


Figura 2. Cuadrado del inverso de la velocidad de fase adimensional versus la frecuencia adimensional para  $\gamma = 0,2$  y  $\eta = 0,5$ .

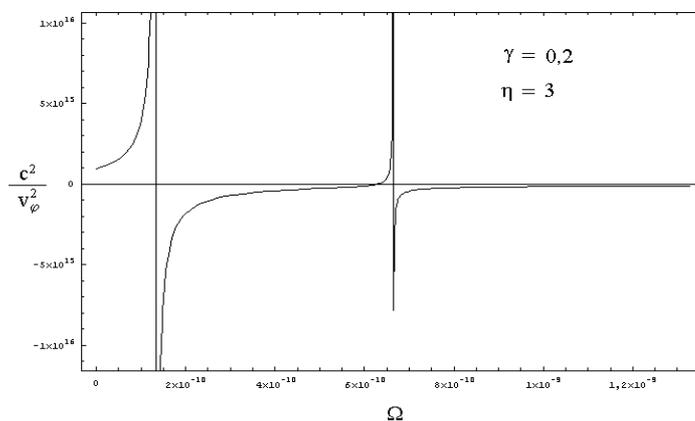


Figura 3. Cuadrado del inverso de la velocidad de fase adimensional versus la frecuencia adimensional para  $\gamma = 0,2$  y  $\eta = 3$ .

**Referencias bibliográficas**

1. AKDIM M. R., GOEDHEER W. J. and DAHIYA R. P. **New Journal of Physics** 5; 20.1-20.14 , 2003.
2. MARTÍN P., CASTRO E., PUERTA J. **Rev. Mexicana de Física** S-52: 224-226, 2006.
3. SHUKLA P.K. and MAMUN A.A. **Introduction to Dusty Plasmas Physics**. IoP Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, p. 120, 2002.
4. SHUKLA P.K. **Phys. Scripta** 45: 504, 1992.