Divulgaciones Matemáticas Vol. 19, No. 1 (2018), pp. 20–33

Funciones conjunto valuadas armónicamente convexas

Harmonically Convex Set-Valued Functions

Gabriel Santana (gaszsantana@gmail.com)
Lysis González (lysis.gonzalez@gmail.com)
Nelson Merentes (nmerucv@gmail.com)
Escuela de Matemática,
Universidad Central de Venezuela,
Caracas, Venezuela

Resumen

En este trabajo se introducen las definiciones de funciones conjunto valuadas armónicamente convexas y armónica fuertemente convexa módulo c. Para estas funciones obtenemos algunos resultados importantes como las desigualdades tipo Hermite-Hadamard y Fejér, también un teorema tipo Bernstein-Doetsch.

Palabras y frases clave: función convexa, función armónicamente convexa conjunto valuada, multifunciones armónica fuertemente convexas módulo c, desigualdad tipo Hermite-Hadamard, desigualdad tipo Fejér, Teorema tipo Bernstein-Doetsch.

Abstract

In this paper we introduce the definitions of harmonically convex and strongly harmonically convex modulus c set-valued functions. We present some results for this kind of functions, like inequalities of Hermite-Hadamard and Fejér type and the Bernstein-Doetsch Theorem type.

Key words and phrases: function convex, harmonically convex set-valued function, strongly harmonically convex set-valued functions modulus c, Hermite-Hadamard inequality, Fejér inequality, Bernstein-Doetsch Theorem type.

1 Introducción

El estudio de la convexidad se ha realizado para funciones conjunto valuadas o multifunciones (ver [4, 17]), esto es, aplicaciones de la forma $F : X \to 2^Y$ donde X y Y son conjuntos. La noción de función conjunto valuada surge a principios del siglo XX, cuando Berge en [5] introdujo el concepto de límite superior e inferior de sucesiones de conjuntos y está motivado por sus

Recibido 12/01/2018. Revisado 08/04/2018. Aceptado 01/07/2018.
MSC (2010): Primary 33E20; Secondary 33E15.
Autor de correspondencia: Gabriel Santana

aplicaciones en Análisis Diferencial e Integral, en la Teoría de Optimización y el Cálculo de Variaciones, entre otras (ver [15]).

Una multifunción $F : X \to 2^Y$ es convexa si para todo $x_1, x_2 \in X$ y $t \in [0,1]$ se tiene que

$$tF(x_1) + (1-t)F(x_2) \subset F(tx_1 + (1-t)x_2). \tag{1}$$

Recientemente se han estudiado distintas nociones de convexidad para funciones conjunto valuadas (ver [13, 14, 18, 19]). Por ejemplo, Huang en [11] extendió la definición (1) e introdujo la convexidad fuerte para multifunciones de la siguiente manera.

Si $(\mathrm{X}, \|\cdot\|), (\mathrm{Y}, \|\cdot\|)$ son espacios vectoriales normados, y $D \subset \mathrm{X}$ un conjunto convexo. Una función conjunto valuada $F : D \to 2^{\mathrm{Y}}$ es **fuertemente convexa módulo** c si para $c > 0$, $x_1, x_2 \in D$ y $t \in (0,1)$ se tiene que

$$tF(x_1) + (1-t)F(x_2) + ct(1-t)\|x_1 - x_2\|^2\overline{B} \subset F(tx_1 + (1-t)x_2), \tag{2}$$

donde $\overline{B}$ denota la clausura de la bola unitaria de Y.

Estas funciones han sido utilizadas para encontrar cotas al error en algunos problemas de inclusión con restricciones de conjuntos (ver [13]). En este trabajo extendemos para multifunciones la noción de convexidad armónica dada por İscan en [12] para funciones reales y para esta clase de funciones conjunto valuadas probamos la contraparte de resultados clásicos del Análisis Convexo: propiedades de estabilidad respecto a operaciones aritméticas, desigualdad de Hermite-Hadamard, desigualdad de Féjer y Teorema de Bernstein-Doetsh.

2 Preliminares

En esta sección el dominio de las funciones que utilizaremos a partir de ahora es armónicamente convexo, por tal motivo es conveniente introducir tal definición.

Definición 2.1. Un conjunto $D \subset [0, \infty)$ se dice que es un conjunto **armónicamente convexo**, si

$$\frac{x_1 x_2}{tx_1 + (1-t)x_2} \in D$$

para todo $x_1, x_2 \in D$, $t \in [0,1]$.

La idea de definir una función armónicamente convexa proviene de hacer una variación en el dominio de una función convexa, con esta idea İ [12] en el año 2014 define lo siguiente:

Definición 2.2. (ver [12]) Una función $f : D \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$ se dice que es una función **armónicamente convexa**, si

$$f\left(\frac{x_1 x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) \leq tf(x_2) + (1-t)f(x_1),$$

para todo $x_1, x_2 \in D$, $t \in [0,1]$.

En [2], Aslam introduce una definición que proporciona una variación armónica fuerte módulo c de la definición introducida por İscan.

Definición 2.3. Una función $f : D \subseteq \mathbb{R}\backslash 0 \to \mathbb{R}$ se dice que es **armónica fuertemente convexa módulo** c si para todo $x_1, x_2 \in D, t \in [0,1]$ y $c > 0$ se tiene que

$$f\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) \leq tf(x_2) + (1-t)f(x_1) - ct(1-t)\left\|\frac{x_1 - x_2}{x_1x_2}\right\|^2. \tag{3}$$

Si en (3) consideramos $t = 1/2$ decimos que f es armónica fuertemente midconvexa módulo c, entonces

$$f\left(\frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}\right) \leq \frac{f(x_2) + f(x_1)}{2} - \frac{c}{4}\left\|\frac{x_1 - x_2}{x_1x_2}\right\|^2.$$

En [12] se presenta el siguiente teorema, que constituye una desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para funciones armónicamente convexas.

Teorema 2.1. *Sean $f : D \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ una función armónicamente convexa y $a, b \in D$ con $a < b$. Si f es integrable en $[0,1]$ se tiene que*

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}. \tag{4}$$

La desigualdad del tipo Fejér para funciones armónicamente convexas, es estudiada y demostrada por Chen y Wu en [7], este generaliza la desigualdad tipo Hermite-Hadamard para esta clase de funciones.

Teorema 2.2. *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ una función armónicamente convexa y $a, b \in D$ con $a < b$. Si f es integrable en $[a,b]$, entonces*

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\int_a^b \frac{p(x)}{x^2}dx \leq \int_a^b \frac{f(x)}{x^2}p(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}\int_a^b \frac{p(x)}{x^2}dx$$

donde $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función positiva que satisface lo siguiente

$$p\left(\frac{ab}{x}\right) = p\left(\frac{ab}{a+b-x}\right) \tag{5}$$

Un resultado importante para los logros de este trabajo es el de Robert Aumann (ver [4]), el cual introduce una definición de integral para funciones conjunto valuadas. Considerando la multifunción $F : [0,1] \to 2^Y$, T como el intervalo $[0,1]$ y el conjunto $\mathfrak{F} = \{f(t)$ es integrable en $\mathrm{T} : f(t) \in F(t) \wedge t \in \mathrm{T}\}$.

3 Resultados Principales

A continuación, en esta sección introduciremos la definición de función conjunto valuada armónicamente convexa y armónica fuertemente convexa módulo c, lo cual extienden los conceptos introducidos en [2, 12].

Definición 3.1. Sean X y Y cuerpos, D un subconjunto armónicamente convexo y $F : D \subset \mathrm{X} \to 2^{\mathrm{Y}}$ una función conjunto valuada. Se dice que F es **armónicamente convexa** si para todo $x_1, x_2 \in D$ y $t \in [0,1]$ se tiene que

$$tF(x_2) + (1-t)F(x_1) \subset F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right). \tag{6}$$

Si consideramos $t = 1/2$ diremos que F es **armónicamente midconvexa** si satisface lo siguiente

$$\frac{F(x_2) + F(x_1)}{2} \subset F\left(\frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}\right)$$

Es posible generalizar esta definición de la siguiente forma:

Definición 3.2. Sean $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ un espacio normado, Y un espacio de Banach, D un subconjunto armónicamente convexo y $F : D \subset \mathrm{X} \to 2^{\mathrm{Y}}$ una función conjunto valuada. Se dice que F es **armónica fuertemente convexa módulo c** si para todo $x_1, x_2 \in D$, $t \in [0, 1]$ y $c > 0$ se tiene que

$$tF(x_2) + (1-t)F(x_1) + ct(1-t)\left\|\frac{x_1 - x_2}{x_1x_2}\right\|^2 \bar{B} \subset F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right), \tag{7}$$

donde $\bar{B}$ es la clausura de la bola unitaria de Y. Si tomamos $t = 1/2$ decimos que F es una función **armónica fuertemente midconvexa módulo** c si

$$\frac{F(x_2) + F(x_1)}{2} + \frac{c}{4}\left\|\frac{x_1 - x_2}{x_1x_2}\right\|^2 \bar{B} \subset F\left(\frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}\right) \tag{8}$$

Ejemplo 3.1. *Sean $f_1, f_2 : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones armónicamente convexas tales que $f_1(x) \leq f_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces la multifunción $F : D \to 2^Y$ definida como $F(x) = [f_1(x), f_2(x)]$ es armónicamente convexa.*

Solución. Como f_1 y $-f_2$ son funciones armónicamente convexas se tiene que para todo $x_1, x_2 \in D$ y $t \in [0, 1]$ lo siguiente:

$$f_1\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) \leq tf_1(x_2) + (1-t)f_1(x_1). \tag{9}$$

$$tf_2(x_2) + (1-t)f_2(x_1) \leq f_2\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right). \tag{10}$$

Entonces

$$[tf_1(x_2) + (1-t)f_1(x_1), tf_2(x_2) + (1-t)f_2(x_1)] \subset \left[f_1\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right), f_2\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right)\right]$$

Luego, mediante un cálculo elemental podemos ver que

$$tF(x_2) + (1-t)F(x_1) \subset F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right)$$

Así, F es una función conjunto valuada armónicamente convexa.

Ejemplo 3.2. *Sea $H \subseteq \mathbb{R}^3$ un conjunto convexo y no vacío que posee al origen de $\mathbb{R}^3 = Y$. Sea $F : \mathbb{R} \to 2^Y$ una función conjunto valuada definida por $F(x) = -x^2H$, siendo $f(x) = -x^2$ una función armónicamente cóncava y H un conjunto convexo que posee al origen, entonces para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y $t \in [0, 1]$ se tiene que*

$$-(tx_2^2 + (1-t)x_1^2) \leq -\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right)^2.$$

Usando la convexidad del conjunto H tenemos que

$$-(tx_2^2+(1-t)x_1^2)H \subseteq -\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right)^2 H = F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right).$$

Luego,

$$-(tx_2^2+(1-t)x_1^2)H = -tx_2H-(1-t)x_1H = tF(x_2)+(1-t)F(x_1).$$

Por tanto,

$$tF(x_2)+(1-t)F(x_1) \subseteq F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right).$$

Así, F es una función conjunto valuada armónicamente convexa.

Ejemplo 3.3. *Si $G : D \subset X \to 2^Y$ es una función conjunto valuada armónicamente convexa, entonces $F(x) = G(x) - cx^2H$, con $x \in I$, es armónica fuertemente convexa módulo c.*

3.1 Operaciones con funciones conjunto valuadas armónicamente convexas

En esta sección, demostraremos que las funciones conjunto valuadas armónicamente convexas son estables bajo la suma, el producto por un escalar y el producto entre funciones.

Proposición 3.1. *Sean X, Y cuerpos sobre $\mathbf{R}$, D un subconjunto armónicamente convexo y $F, G : D \subset \mathrm{X} \to 2^{\mathrm{Y}}$ funciones conjunto valuadas armónicamente convexas. Entonces*

1. *$F+G$ es una función conjunto valuada armónicamente convexa.*
2. *λF es una función conjunto valuada armónicamente convexa, para todo $\lambda \in \mathbf{R}$.*
3. *Si para cada par de puntos $x_1, x_2 \in \mathrm{X}$, se tiene $F(x_1)\bigcap F(x_2) \neq \emptyset$ o $G(x_1)\bigcap G(x_2) \neq \emptyset$ entonces $F \cdot G(x)$ es una función conjunto valuada armónicamente convexa.*

Demostración. 1. Sean $x_1, x_2 \in D$ y $t \in [0,1]$. Dado que F y G son funciones conjunto valuadas armónicamente convexas se tiene que

$$F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right) \supseteq tF(x_2)+(1-t)F(x_1)$$

y

$$G\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right) \supseteq tG(x_2)+(1-t)G(x_1)$$

además tomando en cuenta que si A, B, D, E son conjuntos tales que $A \subseteq B$ y $D \subseteq E$ entonces $A+D \subseteq B+E$, obtenemos el resultado deseado

$$\begin{aligned} F+G\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right) &= F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right)+G\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right) \\ &\supseteq [tF(x_2)+(1-t)F(x_1)]+[tG(x_2)+(1-t)G(x_1)] \\ &= t(F+G)(x_2)+(1-t)(F+G)(x_1). \end{aligned}$$

2. Sean $\lambda \in \mathbf{R}$ y $x_1, x_2 \in D$, entonces:

$$\begin{aligned}\lambda \cdot F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right) &\supseteq \lambda \cdot (tF(x_2)+(1-t)F(x_1)) \\ &= t(\lambda F(x_2))+(1-t)(\lambda F(x_1))\end{aligned}$$

Para $\lambda = 0$ se cumple la igualdad.

3. Antes de probar que $F \cdot G$ es una función conjunto valuada armónicamente convexa veamos que si $x_1, x_2 \in D$, entonces

$$F(x_1)G(x_2)+F(x_2)G(x_1) \subseteq F(x_1)G(x_1)+F(x_2)G(x_2).$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $F(x_1) \bigcap F(x_2) \neq \emptyset$. Tenemos que

$$\{0\} \subseteq [F(x_1)-F(x_2)],$$

donde 0 es el elemento neutro de Y con respecto a la suma. Así

$$\{0\} \subseteq [F(x_1)-F(x_2)][G(x_1)-G(x_2)]$$

Luego, como en Y vale la propiedad distributiva respecto a la adición, la expresión anterior es equivalente a

$$\{0\} \subseteq F(x_1)G(x_1)-F(x_1)G(x_2)-F(x_2)G(x_1)+F(x_2)G(x_2) \tag{11}$$

de modo que, sumando $F(x_1)G(x_2)$ y $F(x_2)G(x_1)$, queda

$$F(x_1)G(x_2)+F(x_2)G(x_1) \subseteq F(x_1)G(x_1)+F(x_2)G(x_2)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta este resultado demostraremos que $F \cdot G$ es una función conjunto valuada armónicamente convexa. En efecto, para $t \in [0,1]$ y $x_1, x_2 \in D$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}(F \cdot G)\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right) &= F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right) \cdot G\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right), \\ &\supset [tF(x_2)+(1-t)F(x_1)][tG(x_2)+(1-t)G(x_1)], \\ &= t^2F(x_2)G(x_2)+t(1-t)[F(x_2)G(x_1)+F(x_1)G(x_2)]+(1-t)^2F(x_1)G(x_1), \\ &\supset t^2F(x_2)G(x_2)+t(1-t)[F(x_2)G(x_2)+F(x_1)G(x_1)]+(1-t)^2F(x_1)G(x_1), \\ &= tF(x_2)G(x_2)+(1-t)F(x_1)G(x_1), \\ &= t(F \cdot G)(x_2)+(1-t)(F \cdot G)(x_1).\end{aligned}$$

□

3.2 Desigualdad Hermite-Hadamard

En [19], se obtienen importantes resultados para multifunciones fuertemente convexas módulo c, entre ellas una desigualdad tipo Hermite-Hadamard para este tipo de funciones.

Notación. Denotamos por $n(Y)$ a la familia de todos los subconjuntos no vacíos de Y, y $cl(Y)$, $acl(Y)$ subfamilias de $n(Y)$ de todos los conjuntos cerrados y acotados, y armónicamente convexos cerrados y acotados respectivamente de Y.

Teorema 3.1. *(ver [19]) Sean D un subconjunto armónicamente convexo y $F : D \subset X \to cl(Y)$ una función conjunto valuada fuertemente convexas módulo c. Entonces si $\bar{B}$ es la bola unitaria cerrada en Y se tiene lo siguientes*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)dx + \frac{c}{12}(b-a)^2\bar{B} \subset F\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

y

$$\frac{F(a)+F(b)}{2} + \frac{c}{6}(b-a)^2\bar{B} \subset \frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)dx,$$

para todo $a, b \in D$ tales que $a < b$

Nótese que para $c = 0$ el teorema provee una desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para funciones conjunto valuadas convexas.

Teorema 3.2. *Sea $F : D \to cl(Y)$ una función conjunto valuada convexa, entonces*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)dx \subset F\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{12}$$

y

$$\frac{F(a)+F(b)}{2} \subset \frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)dx, \tag{13}$$

para todo $a, b \in D$ tales que $a < b$

Utilizando este principio, procederemos a continuación mostrar una desigualdad de tipo Hermite-Hadamard para funciones conjunto valuadas armónicanmente convexas.

Teorema 3.3. *Sean X, Y cuerpos y $D \in X$ un conjunto armónicamente convexo, si $F : D \subset \mathrm{X} \to cl(\mathrm{Y})$ es una función conjunto valuada armónicamente convexa, entonces*

$$\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{F(x)}{x^2}dx \subset F\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \tag{14}$$

y

$$\frac{F(a)+F(b)}{2} \subset \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{F(x)}{x^2}dx, \tag{15}$$

para todo $a, b \in D$ tales que $a < b$

Demostración. Si en (12) consideramos una función conjunto valuada convexa $G(t) = F\left(\frac{1}{t}\right)$ definida en $\left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$, entonces

$$\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} F\left(\frac{1}{t}\right)dt \subset F\left(\frac{1}{\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}{2}}\right)$$

Así,

$$\frac{ab}{b-a}\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} F\left(\frac{1}{t}\right)dt \subset F\left(\frac{2ab}{a+b}\right).$$

la prueba de este teorema se reduce a demostrar que

$$\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} F\left(\frac{1}{t}\right) dt = \int_a^b \frac{F(x)}{x^2} dx.$$

Notemos que en virtud a la definición de la integral de Auman y $f\left(\frac{1}{t}\right)$ con $t \in \mathrm{T}' = \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$ se tiene que

$$\int_{\mathrm{T}'} F\left(\frac{1}{t}\right) dt = \left\{\int_{\mathrm{T}'} f\left(\frac{1}{t}\right) dt : f \in \mathfrak{F}\right\} = \left\{\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} f\left(\frac{1}{t}\right) dt : f \in \mathfrak{F}\right\}.$$

Luego, para $x = \frac{1}{t}$, tenemos lo siguiente

$$\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} f\left(\frac{1}{t}\right) dt = \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx.$$

Entonces,

$$\left\{\int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx : f(x) \in F(x) \wedge x \in [a,b]\right\} = \int_a^b \frac{F(x)}{x^2} dx.$$

Así,

$$\frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{F(x)}{x^2} dx \subset F\left(\frac{2ab}{a+b}\right).$$

Para probar (15) razonamos de manera análoga y obtenemos lo siguiente

$$\frac{F\left(\frac{1}{\frac{1}{b}}\right) + F\left(\frac{1}{\frac{1}{a}}\right)}{2} \subset \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{F(x)}{x^2} dx.$$

Por tanto,

$$\frac{F(b)+F(a)}{2} \subset \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{F(x)}{x^2} dx.$$

□

3.3 Desigualdad tipo Fejér

En esta sección, introduciremos una generalización de la desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para funciones conjunto valuadas armónicamente convexas. En [7] se estudia la desigualdad de Fejér para funciones armónicamente convexas, en este trabajo extenderemos el estudio de Chen y Wu para funciones reales armónica a funciones conjunto valuadas.

Teorema 3.4. *Sean $F : I \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} \to 2^{\mathbb{R}}$ una función conjunto valuada armónicamente convexa y $a, b \in I$ con $a < b$. Si F es Aumann integrable sobre $[a,b] \subset I$ entonces*

$$\frac{F(a)+F(b)}{2} \int_a^b \frac{P(x)}{x^2} dx \subseteq \int_a^b \frac{F(x)P(x)}{x^2} dx \subseteq F\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \int_a^b \frac{P(x)}{x^2} dx. \tag{16}$$

donde $P : [a,b] \to 2^{\mathbb{R}}$, $P(x) = \{p(x)$ es no negativa e integrable, $p(x) \in P(x)\}$ y sastiface lo siguiente

$$P\left(\frac{ab}{x}\right) = P\left(\frac{ab}{a+b-x}\right). \tag{17}$$

Demostración. Sea $F : [a, b] \to 2^{\mathbb{R}}$ una función conjunto valuada armónicamente convexa, entonces para todo $x, y \in [a, b]$ se tiene lo siguiente:

$$tF(y) + (1-t)F(x) \subseteq F\left(\frac{xy}{tx + (1-t)y}\right)$$

para $t = \frac{1}{2}$ obtenemos la siguiente inclusión

$$\frac{F(y) + F(x)}{2} \subseteq F\left(\frac{2xy}{x+y}\right).$$

Consideramos ahora $x = \frac{ab}{(tb+(1-t)a)}$ y $y = \frac{ab}{(ta+(1-t)b)}$, así

$$\frac{F(y) + F(x)}{2} = \frac{F\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right) + F\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)}{2}.$$

Como F es una funcion conjunto valuada armónicamente convexas se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{F(a) + F(b)}{2} &= \frac{(tF(b) + (1-t)F(a)) + (tF(a) + (1-t)F(b))}{2} \\
&\subseteq \frac{F\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right) + F\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)}{2}
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que para todo $t \in [0, 1]$

$$\frac{F\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right) + F\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)}{2} \subseteq F\left(\frac{2ab}{a+b}\right). \tag{18}$$

La inclusión (18) cumple la igualdad para $t = \frac{1}{2}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{F(a) + F(b)}{2} &\subseteq \frac{F\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right) + F\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)}{2} \\
&\subseteq F\left(\frac{2ab}{a+b}\right).
\end{aligned}$$

Entonces, dado $P : [a, b] \to 2^{\mathbb{R}}$ una función conjunto valuada tal que $P(x) = \{p(x)$ es no negativa e integrable, $p(x) \in P(x)\}$ y además cumple la condición (17), se tiene que

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{ab}{tb + (1-t)a}\right) &= P\left(\frac{ab}{a + b - (tb + (1-t)a)}\right) \\
&= P\left(\frac{ab}{ta + (1-t)b}\right).
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
\frac{F(a) + F(b)}{2} P\left(\frac{ab}{tb + (1-t)a}\right) &\subseteq \frac{F\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) P\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) + F\left(\frac{ab}{at+(1-t)b}\right) P\left(\frac{ab}{at+(1-t)b}\right)}{2} \\
&\subseteq F\left(\frac{2ab}{a+b}\right) P\left(\frac{ab}{tb + (1-t)a}\right).
\end{aligned}$$

Integrando en ambos lados de la inclusión con respecto a t sobre $[0,1]$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{F(a)+F(b)}{2}\int_0^1 P\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt &\subseteq \int_0^1\left[\frac{F\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)P\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)+F\left(\frac{ab}{at+(1-t)b}\right)P\left(\frac{ab}{at+(1-t)b}\right)}{2}\right]dt\\ &\subseteq F\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\int_0^1 P\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt. \qquad (19)\end{aligned}$$

Notemos por la definición de Aumann que

$$\int_0^1 P\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt=\left\{\int_0^1 p\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt, p(x)\in P(x)\right\}$$

operando sobre cada integral obtenemos lo siguiente,

$$\int_0^1 p\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt=\frac{ab}{a-b}\int_a^b\frac{p(x)}{x^2}dx;$$

así,

$$\left\{\frac{ab}{a-b}\int_a^b\frac{p(x)}{x^2}dx, p(x)\in P(x)\wedge x\in[a,b]\right\}=\frac{ab}{a-b}\int_a^b\frac{P(x)}{x^2}dx. \qquad (20)$$

Razonando de manera análoga obtenemos la siguiente igualdad

$$\int_0^1\left[\frac{F\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)P\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)+F\left(\frac{ab}{at+(1-t)b}\right)P\left(\frac{ab}{at+(1-t)b}\right)}{2}\right]dt=\frac{ab}{a-b}\int_a^b\frac{F(x)P(x)}{x^2}dx. \qquad (21)$$

Luego, sustituyendo (20) y (21) en (19) y multiplicando $\frac{a-b}{ab}$ a ambos lados de la inclusión, obtenemos el resultado deseado.

$$\frac{F(a)+F(b)}{2}\int_a^b\frac{P(x)}{x^2}dx\subseteq\int_a^b\frac{F(x)P(x)}{x^2}dx\subseteq F\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\int_a^b\frac{P(x)}{x^2}dx.$$

□

3.4 Teorema tipo Bernstein-Doetsch

En esta sección probaremos un teorema tipo Bernstein-Doetsch para funciones conjunto valuadas armónicamente convexas. Para ello presentamos un lema que generaliza la definición de midconvexidad armónica, las demostraciones del lema y el teorema que veremos están hechas basadas en las ideas de Leiva, Merentes, Nikodem y Sánchez que aparecen en [13].

Lema 3.1. *Si $F : D \to n(Y)$ es armónica fuertemente midconvexa módulo c entonces*

$$\frac{k}{2^n}F(x_2)+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)F(x_1)+c\frac{k}{2^n}\left(1-\frac{k}{2^n}\right)\left\|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right\|^2\overline{B}\subset F\left(\frac{x_1x_2}{\frac{k}{2^n}x_1+(1-\frac{k}{2^n})x_2}\right) \qquad (22)$$

para todo $x_1,x_2\in D$ y todo $k,n\in\mathbb{N}$ tal que $k<2^n$.

Demostración. Procederemos a demostrar este lema por el Principio de Inducción Matemática sobre n.

Para $n=1$, tenemos que $k=1<2$ y así la inclusión

$$\frac{F(x_2)+F(x_1)}{2}+\frac{c}{4}\left\|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right\|^2\overline{B}\subset F\left(\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}\right)$$

coincide con la definión de midconvexidad armónica módulo c.

Supongamos ahora que se cumple para algún $n\in\mathbb{N}$ tal que $k<2^n$, deseamos ver que se cumpla para $n+1$. De esta manera sustituyendo $t=\frac{k}{2^{n+1}}$ en la definición de función armónicamente midconvexa módulo c y realizando algunos calculos elementales, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}&\tfrac{k}{2^{n+1}}F(x_2)+\left(1-\tfrac{k}{2^{n+1}}\right)F(x_1)+c\tfrac{k}{2^{n+1}}\left(1-\tfrac{k}{2^{n+1}}\right)\left\|\tfrac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right\|^2\bar{B}\\&\subset\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{k}{2^n}F(x_2)+\left(1-\tfrac{k}{2^n}\right)F(x_1)+c\tfrac{k}{2^n}\left(1-\tfrac{k}{2^n}\right)\left\|\tfrac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right\|^2\overline{B}\right]+\tfrac{1}{2}F(x_1)+\tfrac{ck^2}{4(2^{2n})}\left\|\tfrac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right\|^2\overline{B}.\end{aligned}$$

Nótese que

$$\frac{ck^2}{4(2^{2n})}\left\|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right\|^2=\frac{c}{4}\left\|\frac{x_1-\frac{x_1x_2}{\frac{k}{2^n}x_1+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)x_2}}{x_1\left(\frac{x_1x_2}{\frac{k}{2^n}x_1+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)x_2}\right)}\right\|^2.$$

Entonces

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2}\left[\frac{k}{2^n}F(x_2)+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)F(x_1)+c\frac{k}{2^n}\left(1-\frac{k}{2^n}\right)\left\|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right\|^2\overline{B}\right]+\right.\\&\qquad\left.\frac{1}{2}F(x_1)+\frac{ck^2}{4(2^{2n})}\left\|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right\|^2\overline{B}\right)\\&\subset\frac{1}{2}F\left(\frac{x_1x_2}{\frac{k}{2^n}x_1+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)x_2}\right)+\frac{1}{2}F(x_1)+\frac{c}{4}\left\|\frac{x_1-\frac{x_1x_2}{\frac{k}{2^n}x_1+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)x_2}}{x_1\left(\frac{x_1x_2}{\frac{k}{2^n}x_1+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)x_2}\right)}\right\|^2\overline{B}\\&\subset F\left(\frac{x_1\left(\frac{x_1x_2}{\frac{k}{2^n}x_1+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)x_2}\right)}{\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}\left(\frac{x_1x_2}{\frac{k}{2^n}x_1+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)x_2}\right)}\right)=F\left(\frac{x_1x_2}{\frac{k}{2^{n+1}}x_1+\left(1-\frac{k}{2^{n+1}}\right)x_2}\right).\end{aligned}$$

□

Para efectos de los resultados obtenidos en esta sección, es necesario tener en cuenta el lema a continuación.

Lema 3.2. *(ver [20]) Para cada conjunto acotado $A\subset Y$, la función conjunto valuada $F:\mathbb{R}\to n(Y)$ definida por $F(t)=tA, t\in\mathbb{R}$, es continua en $\mathbb{R}$.*

El siguiente teorema proporciona condiciones que asegura la fuerte convexidad armónica de una función conjunto valuada.

Teorema 3.5. *Sea D un conjunto armónicamente convexo. Si $F : D \to acl(Y)$ es una función conjunto valuada armónica fuertemente midconvexa módulo c y semicontinua superiormente sobre D, entonces F es armónica fuertemente convexa módulo c.*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in D$ y $t \in (0,1)$. Por la densidad de los números diádicos en $[0,1]$, podemos tomar una sucesión de números diadicos $\{q_n\} \subset (0,1)$ tal que $q_n \to t$. Fijando $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_1$ entonces $\|q_n - t\| < \varepsilon$.

Sea $A \subset acl(Y)$, entonces por el Lema 3.2 se tiene que la multifunción $F : s \in \mathbb{R} \to sA$ es continua, así para todo $F(x) \subset A$ con $x \in D$ se tiene que

$$tF(x_2) \subset q_n F(x_2) + \frac{\varepsilon}{4}\bar{B},$$

$$(1-t)F(x_1) \subset (1-q_n)F(x_1) + \frac{\varepsilon}{4}\bar{B} \tag{23}$$

y

$$ct(1-t)\|x_1 - x_2\|^2 \bar{B} \subset cq_n(1-q_n)\left\|\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}\right\|^2 \bar{B} + \frac{\varepsilon}{4}\bar{B} \tag{24}$$

para todo $n \geq n_1$. Por otra parte, dada la semicontinuidad superior de F en el punto $\frac{x_1 x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}$, obtenemos que

$$F\left(\frac{x_1 x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) \subset F\left(\frac{x_1 x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) + \frac{\varepsilon}{4}\bar{B}$$

como $q_n \to t$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_2$ entonces

$$F\left(\frac{x_1 x_2}{q_n x_1 + (1-q_n)x_2}\right) \subset F\left(\frac{x_1 x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) + \frac{\varepsilon}{4}\bar{B} \tag{25}$$

para todo $n \geq n_2$. Por tanto, usando (23), (24), (25) y el Lema 3.1, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} tF(x_2) + (1-t)F(x_1) + ct(1-t)\left\|\tfrac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}\right\|^2 \bar{B} &\subset q_n F(x_2) + (1-q_n)F(x_1) + cq_n(1-q_n)\left\|\tfrac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right\|^2 \bar{B} + \tfrac{3}{4}\varepsilon\bar{B} \\ &\subset F\left(\frac{x_1 x_2}{q_n x_1 + (1-q_n)x_2}\right) + \frac{3}{4}\varepsilon\bar{B} \\ &\subset F\left(\frac{x_1 x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) + \varepsilon\bar{B}, \end{aligned}$$

para todo $n \geq \text{máx}\{n_1, n_2\}$.

Dado que estas inclusiones se satisfacen para todo $\varepsilon > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} tF(x_2) + (1-t)F(x_1) + ct(1-t)\left\|\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}\right\|^2 \bar{B} &\subset \bigcap_{\varepsilon > 0}\left(F\left(\frac{x_1 x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) + \varepsilon\bar{B}\right) \\ &= \overline{F\left(\frac{x_1 x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right)} \\ &= F\left(\frac{x_1 x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right). \end{aligned}$$

Así mostramos que F es armónica fuertemente convexa módulo c. □

Los resultados mostrados en este trabajo amplían el estudio de la convexidad en gran manera, muchos temas interasantes y originales surgen a partir de las definiciones y los teoremas introducidos en este artículo, entre los cuales podemos hacer mención algunos: definir la contraparte cóncava de las definiciones introducidas y con ello obtener los resultados correspondientes, obtener un resultado tipo Kuhn para multifunciones armónicamente convexas estableciendo condiciones para generalizar procesos convexos, establecer el cálculo de la variación para este tipo de funciones, extender la noción de k-convexidad para multifunciones armónicamente convexas.

En general podemos decir que cualquier variación de la definicón clásica de convexidad y convexidad armónica en los reales, se puede extender a multifunciones, y con ello es posible establecer nuevos, importantes e interesantes resultados para ahondar la investigación en esta área de la matemática.

Referencias

[1] Aslam, M. and Inayat K. *Some Integral Inequalities for Harmonically h-convex functions.* U.P.B. Series A, **77** (2015), ISS. 1.

[2] Aslam, M.; Noor, K. I. and Iftikhar, S. *Strongly harmonic convex functions.* Preptint. 2016.

[3] Aubin, J. P. and Frankowska, H. *Set-valued Analysis.* Birkhäuser. 1990.

[4] Aumann, R. J. *Integrals of Set-Valued Functions.* The Hebrew University. Journal of mathematical analysis and applications **12** (1965),1–12. Jerusalem, Israel.

[5] Berge, C. *Topological Space: Including a treatment of Multi-Valued functions, vector spaces and convexity.* Dover Publications, INC. Mineola, New York. 1963.

[6] Bernstein, F. and Doetsch, G. *Zur theorie der konvexen Funktionen*, Math. Ann. **76**(4) (1915), MR 1511840, 514–526.

[7] Chen, F. and Wu, S. *Fejer and Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions.* Hindawi Publishing Corporation, Journal of applied Mathematics, **2014** (2014).

[8] Dragomir, S. *Inequalities of Hermite-Hadamard type for HA-Convex functions.* Mathematics, College of Engineering and Science, Victoria University, PO Box 14428, Melbourne City, MC 8001, Australia. 2015.

[9] González, C. *Teoremas de tipo Bernstein-Doetsch para multifunciones convexas y cóncavas.* Tesis. Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ciencias. Escuela de matematica. Caracas-Venezuela, 2016.

[10] González, L.; Merentes, N. y Santana, G. *Funciones conjunto valuadas armónicamente convexas*, Trabajo especial de grado, Escuela de matemática, Facultad de ciencias, UCV. Caracas-Venezuela, 2016.

[11] Huang, H. *Global error bounds with exponents for multifunctions with set constraints.* Communications in Contemporary Mathematics **12**(03) (2010), 417–435.

[12] İscan, İ. *Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions.* Department of Mathematics, Faculty of Art and Sciences, Giresun University, 28100, Giresun, Turkey, 2014.

[13] Leiva, H.; Merentes, N.; Nikodem, K. and Sánchez, J. L. (2013). *Strongly convex set-valued maps*. Disponible Online en htpp://www.springerlink.com, J. Glob Optim 57:695-705 DOI 10.1007/s 10898-013-00-0051-4.

[14] Mejías, O.; Merentes, N. and Nikodem, K. *Strongly concave set-valued maps*. Mathematica Aeterna **4**(5) (2014), 477–478.

[15] Merentes, N. y Ribas, S. *El desarrollo del concepto de función convexa*. Ediciones IVIC, Caracas-Venezuela, 2013.

[16] Merentes, N. and Nikodem, K. *Remarks on strongly convex functions*. Aequationes Math. **80**(1-2) (2010), 193–199.

[17] Narváez, D. X. y Restrepo, G. *Funciones Multivaluadas*. Facultad de Ciencias Naturales y Exactas Universidad del Valle. Revista de Ciencias, 2011.

[18] Nikodem, K. *A characterization of midconvex set-valued functions*. Acta Universitatis Carolinae-Mathematica ET Physica, 1989.

[19] Nikodem, N.; Sánchez, J. and Sánchez, L. *Jensen and Hermite-Hadamard inequalities for strongly convex set-valued maps*. Mathematica Aeterna, **4**(8) (2014), 979–987.

[20] Nikodem, K. *K-convex and K-concave Set-Valued Functions*, Zeszyty Nauk. Politech. Lódz. Math. **4**(3) (2003), Art. 52.

[21] Nikodem, K. *Continuity of K-convex Set-Valued Fumctions*. Bulletin of the Polish Academy of Sciencies Mathematics. **34**(7-8) (1986).

[22] Polyak, B. T. *Existence theorems and convergence of minimizingsequences in extremun problens with restrictions*. Sov. Math. Dokl. **7** (1966), 72–75.