Divulgaciones Matemáticas Vol. 20, No. 1 (2019), pp. 16–38

Condición de suma de grados y ciclo que contiene cada vértice de un subconjunto balanceado dado en grafos bipartitos balanceados

Degree sum conditions and cycle that contains every vertex of a balanced subset given in balanced bipartite graphs

Daniel Brito (danieljosb@gmail.com)
Lope Mata Marín (lmata73@gmail.com)
Departamento de Matemáticas, Universidad de Oriente, Núcleo de Sucre.
Cumaná, Venezuela.

Henry Ramírez (hlramirez6@hotmail.com)
Departamento de Higiene y Seguridad Laboral
Universidad Politécnica Clodosbaldo Russián.
Cumaná, Venezuela.

Resumen

Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado conexo de orden $2n$ y U un subconjunto de $V(G)$, con $|U \cap A| = |U \cap B|$. En este artículo se demuestra que si $\Delta_{1,1}(S) = max\{d(a) + d(b) : a \in S \cap A \text{ y } b \in S \cap B\} \geq n + 1$, para cada conjunto independiente S de orden $\frac{k(U)}{2} + 1$ en $G[U]$ tal que $S \cap A \neq \emptyset$ y $S \cap B \neq \emptyset$, entonces G contiene un ciclo que incluye todos los vértices de U, donde $k(U)$ denota la mínima cardinalidad de un conjunto de vértices de G que separan dos vértices de U en G.

Palabras y frases clave: grafo bipartito balanceado, condición de suma de grados, conjunto independiente, ciclo.

Abstract

Let $G = (A \cup B, E)$ be a connected balanced bipartite graph of order $2n$ and U a subset of $V(G)$, with $|U \cap A| = |U \cap B|$. In this paper we prove that if $\Delta_{1,1}(S) = max\{d(a) + d(b) : a \in S \cap A \text{ y } b \in S \cap B\} \geq n + 1$, for every independent set S of order $\frac{k(U)}{2} + 1$ in $G[U]$ such that $S \cap A \neq \emptyset$ and $S \cap B \neq \emptyset$, then G contains a cycle that includes every vertex of U, where $k(U)$ denote the minimum cardinality of a set of vertices of G separating two vertices of U in G.

Key words and phrases: balanced bipartite graph, degree sum conditions, independent set, cycle.

Recibido 11/11/2018. Revisado 15/01/2019. Aceptado 25/03/2019.
MSC (2010): 05C07; Secondary 05C38.
Autor de correspondencia: Lope Mata Marín

1 Introducción

Se considera en este artículo únicamente grafos bipartitos balanceados $G = (A \cup B, E)$ simples y finitos, y para la terminología estandar de teoría de grafos no explicada en este artículo, referimos al lector a [1] y [2]. Sea $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado conexo (para cualquier par de vértices existe un camino que los una). Para un vértice u en G, $N_G(u)$ denota el conjunto de vecinos de u en G y $d_G(u) = |N_G(u)|$ el grado de u en G.

Para un conjunto independiente S de G (todos sus vértices son mutuamente no adyacentes en G), se define $\Delta_{1,1}(S) = max\{d_G(a) + d_G(b) : a \in S \cap A \text{ y } b \in S \cap B\}$.

Para un subconjunto R de $V(G)$, $G[R]$ denota el subgrafo de G inducido por R y $k(R)$ la mínima cardinalidad de un conjunto de vértices de G que separan dos vértices de R en G. Para un subgrafo T de G, $N_T(u) = N_G(u) \cap V(T)$ y $d_T(u) = |N_T(u)|$, para cualquier vértice $u \in V(G)\backslash V(T)$. Un camino P que conecta a u y v es denotado por uPv y dos caminos P y Q son vértices disjuntos si no tienen vértices en común e internamente vértices disjuntos si el conjunto de sus vértices internos son disjuntos. Sea C un ciclo con la orientación dada por $\overrightarrow{C}$. Para $u, v \in V(C)$, $u\overrightarrow{C}v$ denota el camino de u hasta v en $\overrightarrow{C}$, $u\overleftarrow{C}v$ la secuencia reversa de $u\overrightarrow{C}v$, u^+ el sucesor de u, u^- el predecesor de u, de acuerdo a la orientación de C, $C[u, v]$ ($C[u, v)$, $C(u, v]$, $C(u, v)$) el subgrafo que va desde u hasta v en $\overrightarrow{C}$ (desde u hasta v^-, desde u^+ hasta v, desde u^+ hasta v^-, respectivamente, en $\overrightarrow{C}$).

Yamashita, en [2], demostró que para todo grafo 2-conexo G, de orden n, y todo subconjunto U de $V(G)$, si $\Delta_2(S) = max\{d(a) + d(b) : a \in S \text{ y } b \in S\} \geq n$, para todo conjunto independiente S de orden $(k(U) + 1)$ en $G[U]$, entonces G contiene un ciclo que incluye todo vértice de U. En este artículo, damos un resultado análogo al anterior en grafos bipartitos balanceados: Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado conexo de orden $2n$ y U un subconjunto balanceado de $V(G)$, $|U \cap A| = |U \cap B|$. Si $\Delta_{1,1}(S) \geq n+1$, para todo conjunto independiente S, con $S \cap A \neq \emptyset$ y $S \cap B \neq \emptyset$, de orden $(\frac{k(U)}{2} + 1)$ en $G[U]$; entonces G contiene un ciclo que incluye todos los vértices de U

2 Lemas preliminares

Lema 2.1. *Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado conexo de orden $2n$, U un subconjunto balanceado de $V(G)$ y k un entero par tal que $k \geq 6$. Sea C un ciclo que contiene el máximo número, como sea posible, de vértices de U tal que $V(G) - V(C)$ es un conjunto de dos vértices independientes u en $U \cap A$ y v en $U \cap B$.*

Sean y_i el último vértice perteneciente a U en $C(v_i, v_{i+1})$, con $i = 1, 2, ..., \frac{k}{2} - 1$, y z_j el primer vértice perteneciente a U en $C(u_j, u_{j+1})$, con $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, ..., k - 1$, tal que $v_i \in N_C(v)$, para toda $i = 1, 2, ..., \frac{k}{2}$, $u_j \in N_C(u)$, para toda $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, ..., k$, y $u_k^+ = v_1$. Entonces existe un subconjunto independiente Σ de U tal que $|V(\Sigma) \cap A| \geq 1$ y $|V(\Sigma) \cap B| \geq 1$.

Demostración. Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado conexo de orden $2n$, U un subconjunto balanceado de $V(G)$ y k un entero par tal que $k \geq 6$.

Sea C un ciclo que contiene el máximo número, como sea posible, de vértices de U tal que $V(G) - V(C)$ es un conjunto de dos vértices independientes u en $U \cap A$ y v en $U \cap B$.

Supongamos que y_i es el último vértice perteneciente a U en $C(v_i, v_{i+1})$, con $1 \leq i \leq \frac{k}{2} - 1$, y z_j es el primer vértice perteneciente a U en $C(u_j, u_{j+1})$, con $\frac{k}{2} + 1 \leq j \leq k - 1$, tal que $v_i \in N_C(v)$, para toda $i = 1, 2, ..., \frac{k}{2}$, $u_j \in N_C(u)$, para toda $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, ..., k$, y $u_k^+ = v_1$.

Definamos los conjuntos

$$\Gamma = \{y_i \in U \cap V(C(v_i, v_{i+1})) : i = 1, 2, ..., \frac{k}{2} - 1\}$$

y

$$\Omega = \{z_j \in U \cap V(C(u_j, u_{j+1})) : j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, ..., k - 1\}.$$

Demostraremos que $\Sigma = \Gamma \cup \Omega \cup \{u, v\}$ es un subconjunto independiente de U tal que $|V(\Sigma) \cap A| \geq 1$ y $|V(\Sigma) \cap B| \geq 1$.

Afirmación I: $y_\varepsilon y_\delta \notin E(G)$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $y_\delta \in \Gamma \cap B$.

En efecto: Sea $y_\varepsilon y_\delta \in E(G)$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$, $y_\delta \in \Gamma \cap B$ y, sin pérdida de generalidad, $\varepsilon < \delta$ en $\overrightarrow{C}$. Entonces existe el ciclo $C_1 = y_\varepsilon \overleftarrow{C} v_{\delta+1} v v_{\varepsilon+1} \overrightarrow{C} y_\delta y_\varepsilon$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$. Ver Figura 1.

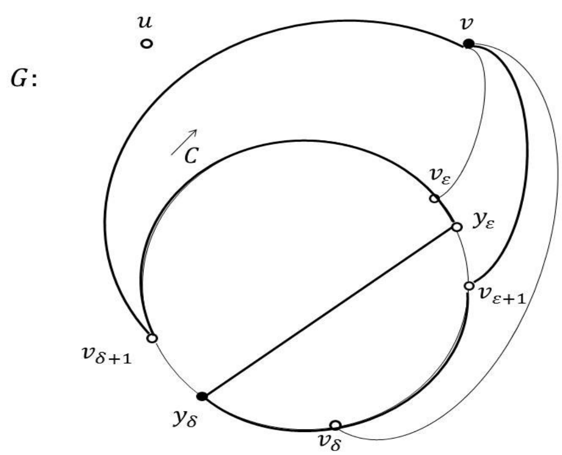

Figura 1: Representa la formación del ciclo C_1 tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$

Lo cual es una contradicción; en consecuencia, $y_\varepsilon y_\delta \notin E(G)$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $y_\delta \in \Gamma \cap B$.

Afirmación II: $v y_\varepsilon \notin E(G)$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$.

En efecto: Sea $v y_\varepsilon \in E(G)$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$. Entonces existe el ciclo $C_1 = v v_{\varepsilon+1} \overrightarrow{C} y_\varepsilon v$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; en consecuencia, $v y_\varepsilon \notin E(G)$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$.

Afirmación III: $u y_\delta \notin E(G)$, con $y_\delta \in \Gamma \cap B$.

En efecto: Sea $u y_\delta \in E(G)$, con $y_\delta \in \Gamma \cap B$. Entonces existe el ciclo $C_1 = y_\delta \overleftarrow{C} v_1 v v_{\delta+1} \overrightarrow{C} u_k u y_\delta$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; en consecuencia, $u y_\delta \notin E(G)$, con $y_\delta \in \Gamma \cap B$.

Afirmación IV: $y_\varepsilon z_\rho \notin E(G)$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $z_\rho \in \Omega \cap B$.

En efecto: Sea $y_\varepsilon z_\rho \in E(G)$, con, sin pérdida de genaralidad, $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $z_\rho \in \Omega \cap B$. Entonces existe el ciclo $C_2 = z_\rho \overrightarrow{C} u_k u u_\rho \overleftarrow{C} v_{\varepsilon+1} v v_1 \overrightarrow{C} y_\varepsilon z_\rho$ tal que $|V(C_2) \cap U| > |V(C) \cap U|$. Ver Figura 2.

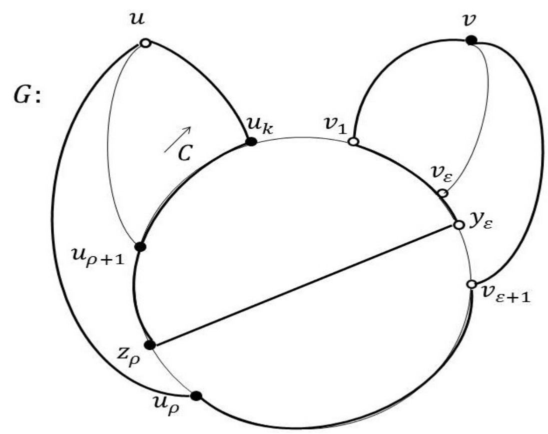

Figura 2: Representa la formación del ciclo C_2 tal que $|V(C_2) \cap U| > |V(C) \cap U|$

Lo cual es una contradicción; en consecuencia, $y_\varepsilon z_\rho \notin E(G)$, con, sin pérdida de generalidad, $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $z_\rho \in \Omega \cap B$.

Afirmación V: $z_\lambda z_\rho \notin E(G)$, con $z_\lambda \in \Omega \cap A$ y $z_\rho \in \Omega \cap B$.

En efecto: Sea $z_\lambda z_\rho \in E(G)$, con $z_\lambda \in \Omega \cap A$, $z_\rho \in \Omega \cap B$ y, sin pérdida de generalidad, $\lambda < \rho$ en $\overrightarrow{C}$. Entonces existe el ciclo $C_1 = z_\rho \overrightarrow{C} u_\lambda u u_\rho \overleftarrow{C} z_\lambda z_\rho$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; en consecuencia, $z_\lambda z_\rho \notin E(G)$, con $z_\lambda \in \Omega \cap A$ y $z_\rho \in \Omega \cap B$.

Afirmación VI: $u z_\rho \notin E(G)$, con $z_\rho \in \Omega \cap B$.

En efecto: Sea $u z_\rho \in E(G)$, con $z_\rho \in \Omega \cap B$. Entonces existe el ciclo $C_1 = u u_\rho \overleftarrow{C} z_\rho u$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; en consecuencia, $u z_\rho \notin E(G)$, con $z_\rho \in \Omega \cap B$.

Afirmación VII: $v z_\lambda \notin E(G)$, con $z_\lambda \in \Omega \cap A$.

En efecto: Sea $v z_\lambda \in E(G)$, con $z_\lambda \in \Omega \cap A$. Entonces existe el ciclo $C_1 = z_\lambda \overrightarrow{C} u_k u u_\lambda \overleftarrow{C} v_1 v z_\lambda$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; en consecuencia, $v z_\lambda \notin E(G)$, con $z_\lambda \in \Omega \cap A$.

Así, de las afirmaciones anteriores, $\Sigma = \Gamma \cup \Omega \cup \{u, v\}$ es un subconjunto independiente de U tal que $|V(\Sigma) \cap A| \geq 1$ y $|V(\Sigma) \cap B| \geq 1$. □

Lema 2.2. *Sean $G = (A \cup B, E)$un grafo bipartito balanceado conexo de orden $2n$, U un subconjunto balanceado de $V(G)$ y k un entero par tal que $k \geq 6$. Sea C un ciclo que contiene el máximo número, como sea posible, de vértices de U tal que $V(G) - V(C)$ es un conjunto de dos vértices independientes u en $U \cap A$ y v en $U \cap B$.*

Sean y_i el último vértice perteneciente a U en $C(v_i, v_{i+1})$, con $i = 1, 2, ..., \frac{k}{2} - 1$, y z_j el primer vértice perteneciente a U en $C(u_j, u_{j+1})$, con $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, ..., k - 1$, tal que $v_i \in N_C(v)$, para toda $i = 1, 2, ..., \frac{k}{2}$, $u_j \in N_C(u)$, para toda $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, ..., k$, y $u_k^+ = v_1$.

Sea Σ un subconjunto independiente de U tal que $|V(\Sigma) \cap A| \geq 1$ y $|V(\Sigma) \cap B| \geq 1$. Entonces $d_G(a) + d_G(b) \leq n$, para todo vértice a en $\Sigma \cap A$ y todo vértice b en $\Sigma \cap B$

Demostración. Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado conexo de orden $2n$, U un subconjunto balanceado de $V(G)$ y k un entero par tal que $k \geq 6$. Sea C un ciclo que contiene el máximo número, como sea posible, de vértices de U tal que $V(G) - V(C)$ tiene dos vértices independientes $u \in U \cap A$ y $v \in U \cap B$.

Sean y_i el último vértice perteneciente a U en $C(v_i, v_{i+1})$, con $1 \leq i \leq \frac{k}{2} - 1$, y z_j el primer vértice perteneciente a U en $C(u_j, u_{j+1})$, con $\frac{k}{2} + 1 \leq j \leq k - 1$, tal que $v_i \in N_C(v)$, para toda $i = 1, 2, ..., \frac{k}{2}$, $u_j \in N_C(u)$, para toda $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, ..., k$, y $u_k^+ = v_1$.

Definamos los conjuntos

$$\Gamma = \{y_i \in U \cap V(C(v_i, v_{i+1})) : i = 1, 2, ..., \frac{k}{2} - 1\}$$

y

$$\Omega = \{z_j \in U \cap V(C(u_j, u_{j+1})) : j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, ..., k - 1\}.$$

Entonces, por el Lema 2.1, $\Sigma = \Gamma \cup \Omega \cup \{u, v\}$ es un subcconjunto independiente de U tal que $|V(\Sigma) \cap A| \geq 1$ y $|V(\Sigma) \cap B| \geq 1$. Demostraremos que $d_G(a) + d_G(b) \leq n$, para todo par de vértices $a \in \Sigma \cap A$ y $b \in \Sigma \cap B$.

Afirmación I: $d_G(y_\varepsilon) + d_G(y_\delta) < n + 1$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $y_\delta \in \Gamma \cap B$.

En efecto: Sean $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $y_\delta \in \Gamma \cap B$ tal que, sin pérdida de generalidad, $\varepsilon < \delta$. Consideremos los siguientes subgrafos de C. Ver Figura 3.

.- $Z_1 = C(y_\varepsilon, v_{\varepsilon+1})$

Tenemos que $y_\delta t \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_1)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\varepsilon \overleftarrow{C} v_{\delta+1} v v_{\varepsilon+1} \overrightarrow{C} y_\delta t \overleftarrow{C} y_\varepsilon$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_1}(y_\delta) = 0$. Así,

$$d_{Z_1}(y_\delta) + d_{Z_1}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_1)| + 1}{2}. \tag{1}$$

.- $Z_2 = C[v_{\varepsilon+1}, y_\delta)$

Si $y_\delta t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_2)$, $y_\varepsilon t^+ \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\varepsilon \overleftarrow{C} v_{\delta+1} v v_{\varepsilon+1} \overrightarrow{C} t y_\delta \overleftarrow{C} t^+ y_\varepsilon$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_2}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_2)|-1}{2} - (d_{Z_2}(y_\delta) - 1)$. Así,

$$d_{Z_2}(y_\delta) + d_{Z_2}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_2)|-1}{2} + 1. \tag{2}$$

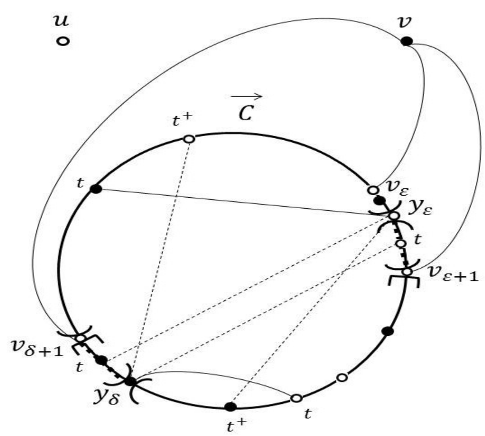

Figura 3: Representa la partición del ciclo C en Z_1, Z_2, Z_3 y Z_4

.- $Z_3 = C(y_\delta, v_{\delta+1}]$

Tenemos que $y_\varepsilon t \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_3)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\delta \overleftarrow{C} v_{\varepsilon+1} v v_{\delta+1} \overrightarrow{C} y_\varepsilon t \overleftarrow{C} y_\delta$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_3}(y_\varepsilon) = 0$. Así,

$$d_{Z_3}(y_\delta) + d_{Z_3}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_3)|+1}{2}. \tag{3}$$

.- $Z_4 = C(v_{\delta+1}, y_\varepsilon)$

Si $y_\varepsilon t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_4)$, $y_\delta t^+ \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\varepsilon t \overleftarrow{C} v_{\delta+1} v v_{\varepsilon+1} \overrightarrow{C} y_\delta t^+ \overrightarrow{C} y_\varepsilon$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_4}(y_\delta) \leq \frac{|V(Z_4)|-1}{2} - (d_{Z_4}(y_\varepsilon) - 1)$. Así,

$$d_{Z_4}(y_\delta) + d_{Z_4}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_4)|-1}{2} + 1. \tag{4}$$

Luego, de (1), (2), (3), (4) y del Lema 2.1, tenemos que:

$$d_G(y_\delta) + d_G(y_\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^{2} \left[\left(\frac{|V(Z_{2i-1})| + 1}{2} \right) + \left(\frac{|V(Z_{2i})| - 1}{2} + 1 \right) \right] = \frac{|C| - 2}{2} + 2 < n + 1$$

Afirmación II: $d_G(y_\varepsilon) + d_G(v) < n + 1$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$.

En efecto: Sea $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y consideremos los siguientes subgrafos de C:

.- $Z_1 = C(y_\varepsilon, v_{\varepsilon+1})$

Tenemos que $vt \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_1)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\varepsilon \overleftarrow{C} v_{\varepsilon+1} vt \overleftarrow{C} y_\varepsilon$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_1}(v) = 0$. Así,

$$d_{Z_1}(y_\varepsilon) + d_{Z_1}(v) \leq \frac{|V(Z_1)| + 1}{2}.(I) \tag{5}$$

.- $Z_2 = C[v_{\varepsilon+1}, y_\varepsilon)$

Si $vt \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_2)$, $y_\varepsilon t^- \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = vt \overrightarrow{C} y_\varepsilon t^- \overleftarrow{C} v_{\varepsilon+1} v$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_2}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_2)|}{2} - (d_{Z_2}(v) - 1)$. Así,

$$d_{Z_2}(y_\varepsilon) + d_{Z_2}(v) \leq \frac{|V(Z_2)|}{2} + 1. \tag{6}$$

Luego, de (5), (6) y Lema 2.1, tenemos que:

$$d_G(y_\varepsilon) + d_G(v) \leq \left(\frac{|V(Z_1)| + 1}{2}\right) + \left(\frac{|V(Z_2)|}{2} + 1\right) = \frac{|C|}{2} + 1 < n + 1$$

Afirmación III: $d_G(y_\delta) + d_G(u) < n + 1$, con $y_\delta \in \Gamma \cap B$.

En efecto: Sea $y_\delta \in \Gamma \cap B$ y consideremos los siguientes subgrafos de C:

.- $Z_1 = C[v_1, y_\delta)$

Si $ut \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_1)$, $y_\delta t^- \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\delta t^- \overleftarrow{C} v_1 v v_{\delta+1} \overrightarrow{C} u_k ut \overrightarrow{C} y_\delta$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_1}(y_\delta) \leq \frac{|V(Z_1)|+1}{2} - d_{Z_1}(u)$. Así,

$$d_{Z_1}(y_\delta) + d_{Z_1}(u) \leq \frac{|V(Z_1)|+1}{2}. \tag{7}$$

.- $Z_2 = C(y_\delta, v_{\delta+1})$

Tenemos que $ut \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_2)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\delta \overleftarrow{C} v_1 v v_{\delta+1} \overrightarrow{C} u_k u t \overleftarrow{C} y_\delta$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_2}(u) = 0$. Así,

$$d_{Z_2}(y_\delta) + d_{Z_2}(u) \leq \frac{|V(Z_2)|}{2}. \tag{8}$$

.- $Z_3 = C[v_{\delta+1}, v_1)$

Si $ut \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_3)$, $y_\delta t^+ \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\delta t^+ \overrightarrow{C} u_k u t \overleftarrow{C} v_{\delta+1} v v_1 \overrightarrow{C} y_\delta$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_3}(y_\delta) \leq \frac{|V(Z_3)|}{2} - (d_{Z_3}(u) - 1)$. Así,

$$d_{Z_3}(y_\delta) + d_{Z_3}(u) \leq \frac{|V(Z_3)|}{2} + 1. \tag{9}$$

Luego, de (7), (8), (9) y del Lema 2.1, tenemos que:

$$d_G(y_\delta) + d_G(u) \leq (\frac{|V(Z_1)|+1}{2}) + (\frac{|V(Z_2)|}{2}) + (\frac{|V(Z_3)|}{2} + 1) = \frac{|C|}{2} + 1 < n + 1$$

Afirmación IV: $d_G(y_\varepsilon) + d_G(z_\rho) < n + 1$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $z_\rho \in \Omega \cap B$.

En efecto: Sean, sin pérdidad de generalidad, $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $z_\rho \in \Omega \cap B$. Consideremos los siguientes subgrafos de C. Ver Figura 4.

.- $Z_1 = C(v_1, y_\varepsilon)$

Si $y_\varepsilon t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_1)$, $z_\rho t^+ \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\varepsilon t \overleftarrow{C} v_1 v v_{\varepsilon+1} \overrightarrow{C} u_\rho u u_k \overleftarrow{C} z_\rho t^+ \overrightarrow{C} y_\varepsilon$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_1}(z_\rho) \leq \frac{|V(Z_1)|-1}{2} - (d_{Z_1}(y_\varepsilon) - 1)$. Así,

$$d_{Z_1}(z_\rho) + d_{Z_1}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_1)|-1}{2} + 1. \tag{10}$$

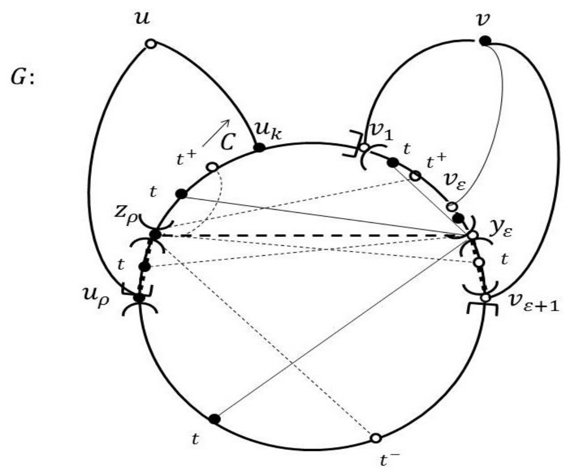

Figura 4: Representa la partición del ciclo C en Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 y Z_5

.- $Z_2 = C(y_\varepsilon, v_{\varepsilon+1})$

Tenemos que $z_\rho t \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_2)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\varepsilon \overleftarrow{C} v_1 v v_{\varepsilon+1} \overrightarrow{C} u_\rho u u_k \overleftarrow{C} z_\rho t \overleftarrow{C} y_\varepsilon$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_2}(z_\rho) = 0$. Así,

$$d_{Z_2}(z_\rho) + d_{Z_2}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_2)| + 1}{2}. \tag{11}$$

.- $Z_3 = C[v_{\varepsilon+1}, u_\rho)$

Si $y_\varepsilon t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_3)$, $z_\rho t^- \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\varepsilon t \overrightarrow{C} u_\rho u u_k \overleftarrow{C} z_\rho t^- \overleftarrow{C} v_{\varepsilon+1} v v_1 \overrightarrow{C} y_\varepsilon$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_3}(z_\rho) \leq \frac{|V(Z_3)|+1}{2} - d_{Z_3}(y_\varepsilon)$. Así,

$$d_{Z_3}(z_\rho) + d_{Z_3}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_3)| + 1}{2}. \tag{12}$$

.- $Z_4 = C[u_\rho, z_\rho)$

Tenemos que $y_\varepsilon t \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_4)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = z_\rho \overrightarrow{C} u_k u u_\rho \overleftarrow{C} v_{\varepsilon+1} v v_1 \overrightarrow{C} y_\varepsilon t \overrightarrow{C} z_\rho$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_4}(y_\varepsilon) = 0$. Así,

$$d_{Z_4}(z_\rho) + d_{Z_4}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_4)|}{2}. \tag{13}$$

.- $Z_5 = C(z_\rho, v_1]$

Si $y_\varepsilon t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_5)$, $z_\rho t^+ \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\varepsilon t \overleftarrow{C} z_\rho t^+ \overrightarrow{C} u_k u u_\rho \overleftarrow{C} v_{\varepsilon+1} v v_1 \overrightarrow{C} y_\varepsilon$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_5}(z_\rho) \leq \frac{|V(Z_5)|+1}{2} - d_{Z_5}(y_\varepsilon)$. Así,

$$d_{Z_5}(z_\rho) + d_{Z_5}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_5)|+1}{2}. \tag{14}$$

Luego, de (10), (11), (12), (13), (14) y por el Lema 2.1, tenemos que:

$$\begin{aligned} d_G(z_\rho) + d_G(y_\varepsilon) &\leq \left(\tfrac{|V(Z_1)|-1}{2} + 1\right) + \left(\tfrac{|V(Z_2)|+1}{2}\right) + \left(\tfrac{|V(Z_3)|+1}{2}\right) + \left(\tfrac{|V(Z_4)|}{2}\right) + \left(\tfrac{|V(Z_5)|+1}{2}\right) \\ &= \frac{|C|-2}{2} + 2 = \frac{|C|}{2} + 1 < n+1 \end{aligned}$$

Las demostraciones de las siguientes afirmaciones, son análogas a las anteriores:

Afirmación V: $d_G(z_\lambda) + d_G(z_\rho) < n + 1$, con $z_\lambda \in \Omega \cap A$ y $z_\rho \in \Omega \cap B$.

Afirmación VI: $d_G(z_\rho) + d_G(u) < n + 1$, con $z_\rho \in \Omega \cap B$.

Afirmación VII: $d_G(z_\lambda) + d_G(v) < n + 1$, con $z_\lambda \in \Omega \cap A$.

Así, de las afirmaciones anteriores, $d_G(a)+d_G(b) \leq n$, para todo par de vértices, no adyacentes, $a \in \Sigma \cap A$ y $b \in \Sigma \cap B$. □

Lema 2.3. *Sea $G = (A \cup B, E)$un grafo bipartito balanceado conexo de orden $2n$, U un subconjunto balanceado de $V(G)$ y k un entero par tal que $k \geq 6$. Sea C un ciclo que contiene el máximo número, como sea posible, de vértices de U tal que $V(G) - V(C)$ es un lado de vértices extremos $u \in U \cap A$ y $v \in U \cap B$.*

Sean y_i el primer vértice perteneciente a U en $C(v_i, v_{i+1})$, con $i = 1, 2, ..., \frac{k}{2} - 1$, y z_j el primer vértice perteneciente a U en $C(u_j, u_{j+1})$, con $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, ..., k - 1$, tal que $v_i \in N_C(v)$, para toda $i = 1, 2, ..., \frac{k}{2}$ y $u_j \in N_C(u)$, para toda $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, ..., k$. Sean τ_1 el primer vértice perteneciente a U en $C(v_{\frac{k}{2}}, u_{\frac{k}{2}+1})$ y τ_2 el primer vértice perteneciente a U en $C(u_k, v_1)$. Entonces existe un subconjunto independiente Σ de U tal que $|V(\Sigma) \cap A| \geq 1$ y $|V(\Sigma) \cap B| \geq 1$.

Demostración. Sea $G = (A \cup B, E)$un grafo bipartito balanceado conexo de orden $2n$, U un subconjunto balanceado de $V(G)$ y k un entero par tal que $k \geq 6$.Sea C un ciclo que contiene el máximo número, como sea posible, de vértices de U tal que $V(G) - V(C)$ es un lado de vértices extremos $u \in U \cap A$ y $v \in U \cap B$.

Supongamos que y_i es el primer vértice perteneciente a U en $C(v_i, v_{i+1})$, con $1 \leq i \leq \frac{k}{2} - 1$, tal que $v_i \in N_C(v)$, para toda $i = 1, 2, ..., \frac{k}{2}$; z_j es el primer vértice perteneciente a U en $C(u_j, u_{j+1})$, con $\frac{k}{2} + 1 \leq j \leq k - 1$, tal que $u_j \in N_C(u)$, para toda $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, ..., k$; y, además, sin pérdidad de generalidad, que $\tau_1 \in U \cap B$ y $\tau_2 \in U \cap A$ son los primeros vértice en $C(v_{\frac{k}{2}}, u_{\frac{k}{2}+1})$ y $C(u_k, v_1)$ respectivamente.

Definamos los conjuntos

$$\Gamma = \{y_i \in U \cap V(C(v_i, v_{i+1})) : i = 1, 2, ..., \frac{k}{2} - 1\}$$

y

$$\Omega = \{z_j \in U \cap V(C(u_j, u_{j+1})) : j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, ..., k - 1\}.$$

Demostraremos que $\Sigma = \Gamma \cup \Omega \cup \{u\} \cup \{\tau_1, \tau_2\}$ es un subconjunto independiente de U tal que $|V(\Sigma) \cap A| \geq 1$ y $|V(\Sigma) \cap B| \geq 1$.

Afirmación I: $y_\varepsilon y_\delta \notin E(G)$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $y_\delta \in \Gamma \cap B$.

En efecto: Sea $y_\varepsilon y_\delta \in E(G)$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$, $y_\delta \in \Gamma \cap B$ y, sin pérdida de generalidad, $\varepsilon < \delta$ en $\overrightarrow{C}$. Entonces existe el ciclo $C_1 = y_\varepsilon \overrightarrow{C} v_\delta v v_\varepsilon \overleftarrow{C} y_\delta y_\varepsilon$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; en consecuencia, $y_\varepsilon y_\delta \notin E(G)$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $y_\delta \in \Gamma \cap B$.

Afirmación II: $uy_\delta \notin E(G)$, con $y_\delta \in \Gamma \cap B$.

En efecto: Sea $uy_\delta \in E(G)$, con $y_\delta \in \Gamma \cap B$. Entonces existe el ciclo $C_1 = y_\delta \overrightarrow{C} v_\delta v u y_\delta$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; en consecuencia, $uy_\delta \notin E(G)$, con $y_\delta \in \Gamma \cap B$.

Afirmación III: $y_\delta z_\lambda \notin E(G)$, con $y_\delta \in \Gamma \cap B$ y $z_\lambda \in \Omega \cap A$.

En efecto: Sea $y_\delta z_\lambda \in E(G)$, con, sin pérdida de generalidad, $y_\delta \in \Gamma \cap B$ y $z_\lambda \in \Omega \cap A$. Entonces existe el ciclo $C_3 = y_\delta \overrightarrow{C} u_\lambda u v v_\delta \overleftarrow{C} z_\lambda y_\delta$ tal que $|V(C_3) \cap U| > |V(C) \cap U|$. Ver Figura 5.

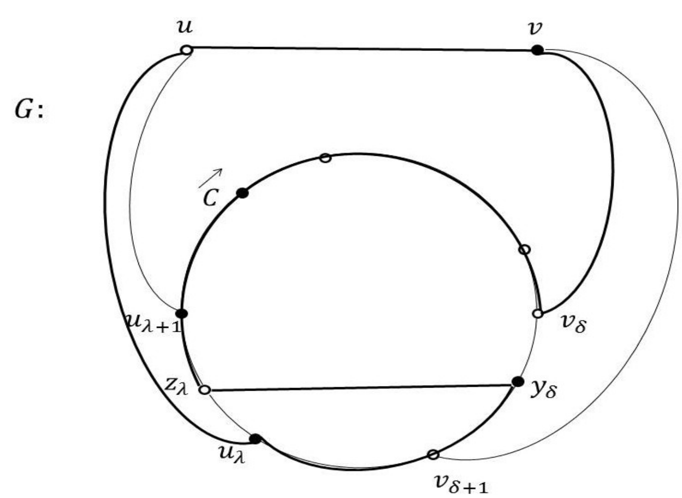

Figura 5: Representa la formación del ciclo C_3 tal que $|V(C_3) \cap U| > |V(C) \cap U|$

Lo cual es una contradicción; en consecuencia, $y_\delta z_\lambda \notin E(G)$, con, sin pérdida de generalidad, $y_\delta \in \Gamma \cap B$ y $z_\lambda \in \Omega \cap A$.

Afirmación IV: $z_\lambda z_\rho \notin E(G)$, con $z_\lambda \in \Omega \cap A$ y $z_\rho \in \Omega \cap B$.

En efecto: Sea $z_\lambda z_\rho \in E(G)$, con $z_\lambda \in \Omega \cap A$, $z_\rho \in \Omega \cap B$ y, sin pérdida de generalidad, $\lambda < \rho$ en $\overrightarrow{C}$. Entonces existe el ciclo $C_1 = z_\rho \overrightarrow{C} u_\lambda u u_\rho \overleftarrow{C} z_\lambda z_\rho$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; en consecuencia, $z_\lambda z_\rho \notin E(G)$, con $z_\lambda \in \Omega \cap A$ y $z_\rho \in \Omega \cap B$.

Afirmación V: $u z_\rho \notin E(G)$, con $z_\rho \in \Omega \cap B$.

En efecto: Sea $u z_\rho \in E(G)$, con $z_\rho \in \Omega \cap B$. Entonces existe el ciclo $C_1 = z_\rho \overrightarrow{C} u_\rho u z_\rho$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; en consecuencia, $u z_\rho \notin E(G)$, con $z_\rho \in \Omega \cap B$.

Afirmación VI: $\tau_1 y_\varepsilon \notin E(G)$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$.

En efecto: Sea $\tau_1 y_\varepsilon \in E(G)$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$. Entonces existe el ciclo $C_1 = y_\varepsilon \overrightarrow{C} v_{\frac{k}{2}} v v_\varepsilon \overleftarrow{C} \tau_1 y_\varepsilon$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; en consecuencia, $\tau_1 y_\varepsilon \notin E(G)$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$.

Afirmación VII: $\tau_1 z_\lambda \notin E(G)$, con $z_\lambda \in \Omega \cap A$.

En efecto: Sea $\tau_1 z_\lambda \in E(G)$, con $z_\lambda \in \Omega \cap A$. Entonces existe el ciclo $C_1 = z_\lambda \overrightarrow{C} v_{\frac{k}{2}} v u u_\lambda \overleftarrow{C} \tau_1 z_\lambda$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; en consecuencia, $\tau_1 z_\lambda \notin E(G)$, con $z_\lambda \in \Omega \cap A$.

Afirmación VIII: $\tau_1 u \notin E(G)$.

En efecto: Sea $\tau_1 u \in E(G)$. Entonces existe el ciclo $C_1 = \tau_1 \overrightarrow{C} v_{\frac{k}{2}} v u \tau_1$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; en consecuencia, $\tau_1 u \in E(G)$.

Afirmación IX: $\tau_1 \tau_2 \notin E(G)$.

En efecto: Sea $\tau_1 \tau_2 \in E(G)$. Entonces existe el ciclo $C_4 = \tau_2 \overrightarrow{C} v_{\frac{k}{2}} v u u_k \overleftarrow{C} \tau_1 \tau_2$ tal que $|V(C_4) \cap U| > |V(C) \cap U|$. Ver Figura 6.

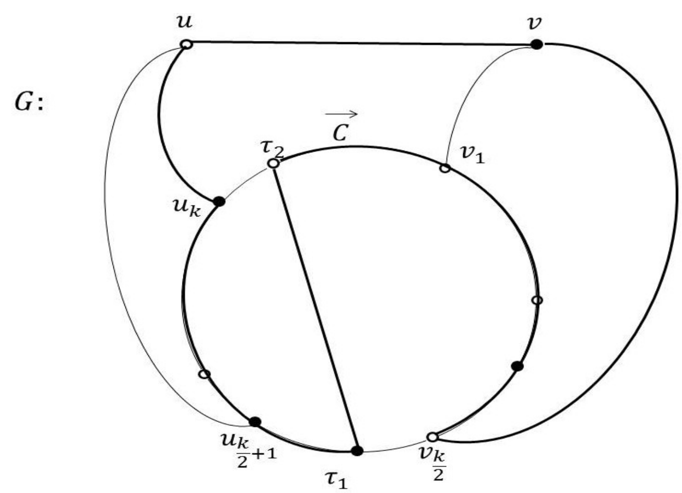

Figura 6: Representa la formación del ciclo C_4 tal que $|V(C_4) \cap U| > |V(C) \cap U|$

Lo cual es una contradicción; en consecuencia, $\tau_1\tau_2 \in E(G)$.

Afirmación X: $\tau_2 y_\delta \notin E(G)$, con $y_\delta \in \Gamma \cap B$.

En efecto: Sea $\tau_2 y_\delta \notin E(G)$, con $y_\delta \in \Gamma \cap B$. Entonces existe el ciclo $C_1 = \tau_2 \overrightarrow{C} v_\delta v u u_k \overleftarrow{C} y_\delta \tau_2$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; en consecuencia, $\tau_2 y_\delta \notin E(G)$, con $y_\delta \in \Gamma \cap B$.

Afirmación XI: $\tau_2 z_\rho \notin E(G)$, con $z_\rho \in \Omega \cap B$.

En efecto: Sea $\tau_2 z_\rho \notin E(G)$, con $z_\rho \in \Omega \cap B$. Entonces existe el ciclo $C_1 = \tau_2 \overrightarrow{C} u_\rho u u_k \overleftarrow{C} z_\rho \tau_2$ tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; en consecuencia, $\tau_2 z_\rho \notin E(G)$, con $z_\rho \in \Omega \cap B$.

Así, de las afirmaciones anteriores, $\Sigma = \Gamma \cup \Omega \cup \{u\} \cup \{\tau_1, \tau_2\}$ es un subconjunto independiente de U, tal que $|V(\Sigma) \cap A| \geq 1$ y $|V(\Sigma) \cap B| \geq 1$. □

Lema 2.4. *Sea $G = (A \cup B, E)$un grafo bipartito balanceado conexo de orden $2n$, U un subconjunto balanceado de $V(G)$ y k un entero par tal que $k \geq 6$. Sea C un ciclo que contiene el máximo número, como sea posible, de vértices de U tal que $V(G) - V(C)$ es un lado de vértices extremos u en $U \cap A$ y v en $U \cap B$.*

Sean y_i el primer vértice perteneciente a U en $C(v_i, v_{i+1})$, con $i = 1, 2, ..., \frac{k}{2} - 1$, y z_j el primer vértice perteneciente a U en $C(u_j, u_{j+1})$, con $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, ..., k - 1$, tal que $v_i \in N_C(v)$, para toda $i = 1, 2, ..., \frac{k}{2}$ y $u_j \in N_C(u)$, para toda $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, ..., k$. Sean τ_1 el primer vértice perteneciente a U en $C(v_{\frac{k}{2}}, u_{\frac{k}{2}+1})$ y τ_2 el primer vértice perteneciente a U en $C(v_k, v_1)$.

Sea Σ un subconjunto independiente de U tal que $|V(\Sigma) \cap A| \geq 1$ y $|V(\Sigma) \cap B| \geq 1$. Entonces $d_G(a) + d_G(b) \leq n$, para todo vértice a en $\Sigma \cap A$ y todo vértice b en $\Sigma \cap B$

Demostración. Sean $G = (A \cup B, E)$un grafo bipartito balanceado conexo de orden $2n$, U un subconjunto balanceado de $V(G)$ y k un entero par tal que $k \geq 6$.Sea C un ciclo que contiene el máximo número, como sea posible, de vértices de U tal que $V(G) - V(C)$ es un lado de vértices extremos $u \in U \cap A$ y $v \in U \cap B$.

Supongamos que y_i es el primer vértice perteneciente a U en $C(v_i, v_{i+1})$, con $1 \leq i \leq \frac{k}{2}-1$, tal que $v_i \in N_C(v)$, para toda $i = 1, 2, ..., \frac{k}{2}$; z_j es el primer vértice perteneciente a U en $C(u_j, u_{j+1})$, con $\frac{k}{2}+1 \leq j \leq k-1$, tal que $u_j \in N_C(u)$, para toda $j = \frac{k}{2}+1, \frac{k}{2}+2, ..., k$; y, además, sin pérdidad de generalidad, que $\tau_1 \in U \cap B$ y $\tau_2 \in U \cap A$ son los primeros vértice de U en $C(v_{\frac{k}{2}}, u_{\frac{k}{2}+1})$ y $C(u_k, v_1)$ respectivamente.

Definamos los conjuntos

$$\Gamma = \{y_i \in U \cap V(C(v_i, v_{i+1})) : i = 1, 2, ..., \frac{k}{2} - 1\}$$

y

$$\Omega = \{z_j \in U \cap V(C(u_j, u_{j+1})) : j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, ..., k - 1\}.$$

Entonces, por el Lema 2.3, $\Sigma_1 = \Gamma \cup \Omega \cup \{\tau_1, \tau_2\} \subseteq \Sigma$ es un subconjunto independiente de U tal que $|V(\Sigma_1) \cap A| \geq 1$ y $|V(\Sigma_1) \cap B| \geq 1$. Demostraremos que $d_G(a) + d_G(b) \leq n$, para todo par de vértices $a \in \Sigma_1 \cap A$ y $b \in \Sigma_1 \cap B$.

Afirmación I: $d_G(y_\varepsilon) + d_G(y_\delta) < n + 1$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $y_\delta \in \Gamma \cap B$.

En efecto: Sean $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $y_\delta \in \Gamma \cap B$ tal que, sin pérdida de generalidad, $\delta < \varepsilon$ en $\overrightarrow{C}$. Consideremos los siguientes subgrafos de C:

.- $Z_1 = C(y_\delta, v_\varepsilon]$

Si $y_\delta t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_1)$, $y_\varepsilon t^- \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\delta t \overrightarrow{C} v_\varepsilon v v_\delta \overleftarrow{C} y_\varepsilon t^- \overleftarrow{C} y_\delta$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_1}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_1)|-1}{2} - (d_{Z_1}(y_\delta) - 1)$. Así,

$$d_{Z_1}(y_\varepsilon) + d_{Z_1}(y_\delta) \leq \frac{|V(Z_1)| - 1}{2} + 1. \tag{15}$$

.- $Z_2 = C(v_\varepsilon, y_\varepsilon)$

Tenemos que $y_\delta t \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_2)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\varepsilon \overrightarrow{C} v_\delta v v_\varepsilon \overleftarrow{C} y_\delta t \overrightarrow{C} y_\varepsilon$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_2}(y_\delta) = 0$. Así,

$$d_{Z_2}(y_\delta) + d_{Z_2}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_2)| + 1}{2}. \tag{16}$$

.- $Z_3 = C(y_\varepsilon, v_\delta]$

Si $y_\varepsilon t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_3)$, $y_\delta t^- \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\delta t^- \overleftarrow{C} y_\varepsilon t \overrightarrow{C} v_\delta v v_\varepsilon \overleftarrow{C} y_\delta$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_3}(y_\delta) \leq \frac{|V(Z_3)|}{2} - (d_{Z_3}(y_\varepsilon) - 1)$. Así,

$$d_{Z_3}(y_\varepsilon) + d_{Z_3}(y_\delta) \leq \frac{|V(Z_3)|}{2} + 1. \tag{17}$$

.- $Z_4 = C(v_\delta, y_\delta)$

Tenemos que $y_\varepsilon t \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_4)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\delta \overrightarrow{C} v_\varepsilon v v_\delta \overleftarrow{C} y_\varepsilon t \overrightarrow{C} y_\delta$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_4}(y_\varepsilon) = 0$. Así,

$$d_{Z_4}(y_\delta) + d_{Z_4}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_4)|}{2}. \tag{18}$$

Luego, de (15), (16), (17), (18) y Lema 2.3, tenemos que:

$$d_G(y_\delta)+d_G(y_\varepsilon) \leq (\frac{|V(Z_1)|-1}{2}+1)+(\frac{|V(Z_2)|+1}{2})+(\frac{|V(Z_3)|}{2}+1)+(\frac{|V(Z_4)|}{2}) = \frac{|C|-2}{2}+2 < n+1$$

Afirmación II: $d_G(y_\delta) + d_G(z_\lambda) < n + 1$, con $y_\delta \in \Gamma \cap B$ y $z_\lambda \in \Omega \cap A$.

En efecto: Sean, sin pérdidad de generalidad, $y_\delta \in \Gamma \cap B$ y $z_\lambda \in \Omega \cap A$. Consideremos los siguientes subgrafos de C. Ver Figura 7.

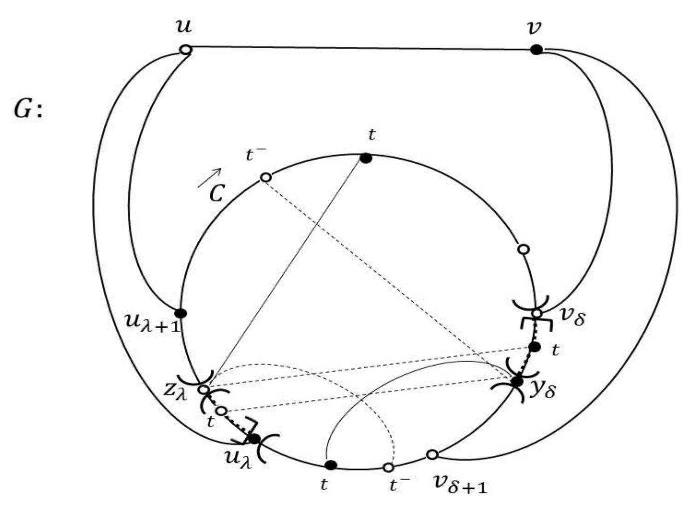

Figura 7: Representa la partición del ciclo C en Z_1, Z_2, Z_3 y Z_4

.- $Z_1 = C(y_\delta, u_\lambda)$

Si $y_\delta t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_1)$, $z_\lambda t^- \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\delta t \overrightarrow{C} u_\lambda u v v_\delta \overleftarrow{C} z_\lambda t^- \overleftarrow{C} y_\delta$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_1}(z_\lambda) \leq \frac{|V(Z_1)|-1}{2} - (d_{Z_1}(y_\delta) - 1)$. Así,

$$d_{Z_1}(z_\lambda) + d_{Z_1}(y_\delta) \leq \frac{|V(Z_1)| - 1}{2} + 1.(I) \tag{19}$$

.- $Z_2 = C[u_\lambda, z_\lambda)$

Tenemos que $y_\delta t \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_2)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = z_\lambda \overrightarrow{C} v_\delta v u u_\lambda \overleftarrow{C} y_\delta t \overrightarrow{C} z_\lambda$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_2}(y_\delta) = 0$. Así,

$$d_{Z_2}(z_\lambda) + d_{Z_2}(y_\delta) \leq \frac{|V(Z_2)| + 1}{2}.(II) \tag{20}$$

.- $Z_3 = C(z_\lambda, v_\delta)$

Si $z_\lambda t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_3)$, $y_\delta t^- \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = z_\lambda t \overrightarrow{C} v_\delta v u u_\lambda \overleftarrow{C} y_\delta t^- \overleftarrow{C} z_\lambda$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_3}(y_\delta) \leq \frac{|V(Z_3)|-1}{2} - (d_{Z_3}(z_\lambda) - 1)$. Así,

$$d_{Z_3}(z_\lambda) + d_{Z_3}(y_\delta) \leq \frac{|V(Z_3)| - 1}{2} + 1.(III) \tag{21}$$

.- $Z_4 = C[v_\delta, y_\delta)$

Tenemos que $z_\lambda t \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_4)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\delta \overrightarrow{C} u_\lambda u v v_\delta \overleftarrow{C} z_\lambda t \overrightarrow{C} y_\delta$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_4}(z_\lambda) = 0$. Así,

$$d_{Z_4}(z_\lambda) + d_{Z_4}(y_\delta) \leq \frac{|V(Z_4)| + 1}{2}.(IV) \tag{22}$$

Luego, de (19I), (20II), (21III), (22IV) y Lema 2.3, tenemos que:

$$d_G(y_\delta) + d_G(z_\lambda) \leq \sum_{i=1}^{2} \left[\left(\frac{|V(Z_{2i-1})| - 1}{2} + 1 \right) + \left(\frac{|V(Z_{2i})| + 1}{2} \right) \right] = \frac{|C| - 2}{2} + 2 < n + 1$$

Afirmación III: $d_G(y_\varepsilon) + d_G(\tau_1) < n+1$, con $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $\tau_1 \in C(v_{\frac{k}{2}}, u_{\frac{k}{2}+1}) \cap B$.

En efecto: Sean $y_\varepsilon \in \Gamma \cap A$ y $\tau_1 \in C(v_{\frac{k}{2}}, u_{\frac{k}{2}+1}) \cap B$. Consideremos los siguientes subgrafos de C:

.- $Z_1 = C(y_\varepsilon, v_{\frac{k}{2}})$

Si $y_\varepsilon t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_1)$, $\tau_1 t^- \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\varepsilon t \overrightarrow{C} v_{\frac{k}{2}} v v_\varepsilon \overleftarrow{C} \tau_1 t^- \overleftarrow{C} y_\varepsilon$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_1}(\tau_1) \leq \frac{|V(Z_1)|-1}{2} - (d_{Z_1}(y_\varepsilon) - 1)$. Así,

$$d_{Z_1}(\tau_1) + d_{Z_1}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_1)|-1}{2} + 1. \tag{23}$$

.- $Z_2 = C[v_{\frac{k}{2}}, \tau_1)$

Tenemos que $y_\varepsilon t \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_2)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = \tau_1 \overrightarrow{C} v_\varepsilon v v_{\frac{k}{2}} \overleftarrow{C} y_\varepsilon t \overrightarrow{C} \tau_1$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_2}(y_\varepsilon) = 0$. Así,

$$d_{Z_2}(\tau_1) + d_{Z_2}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_2)|+1}{2}. \tag{24}$$

.- $Z_3 = C(\tau_1, v_\varepsilon]$

Si $y_\varepsilon t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_3)$, $\tau_1 t^+ \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\varepsilon \overrightarrow{C} v_{\frac{k}{2}} v v_\varepsilon \overleftarrow{C} t^+ \tau_1 \overrightarrow{C} t y_\varepsilon$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_3}(\tau_1) \leq \frac{|V(Z_3)|+1}{2} - d_{Z_3}(y_\varepsilon)$. Así,

$$d_{Z_3}(\tau_1) + d_{Z_3}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_3)|+1}{2}. \tag{25}$$

.- $Z_4 = C(v_\varepsilon, y_\varepsilon)$

Tenemos que $\tau_1 t \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_4)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = y_\varepsilon \overrightarrow{C} v_{\frac{k}{2}} v v_\varepsilon \overleftarrow{C} \tau_1 t \overrightarrow{C} y_\varepsilon$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_4}(\tau_1) = 0$. Así,

$$d_{Z_4}(\tau_1) + d_{Z_4}(y_\varepsilon) \leq \frac{|V(Z_4)|+1}{2}. \tag{26}$$

Luego, de (23), (24), (25), (26) y Lema 2.3, tenemos que:

$$d_G(\tau_1)+d_G(y_\varepsilon) \leq \left(\frac{|V(Z_1)|-1}{2}+1\right)+\sum_{i=2}^{4}\left(\frac{|V(Z_i)|+1}{2}\right)=\frac{|C|-2+2}{2}+1=\frac{|C|}{2}+1<n+1$$

Afirmación IV: $d_G(z_\rho)+d_G(\tau_2)<n+1$, con $z_\rho \in \Gamma \cap B$ y $\tau_2 \in C(u_k, v_1) \cap A$.

En efecto: Sean $z_\rho \in \Gamma \cap B$ y $\tau_2 \in C(u_k, v_1) \cap A$. Consideremos los siguientes subgrafos de C:

.- $Z_1 = C(\tau_2, u_\rho]$

Si $z_\rho t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_1)$, $\tau_2 t^+ \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = z_\rho \overrightarrow{C} u_k u u_\rho \overleftarrow{C} t^+ \tau_2 \overrightarrow{C} t z_\rho$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_1}(\tau_2) \leq \frac{|V(Z_1)|+1}{2} - d_{Z_1}(z_\rho)$. Así,

$$d_{Z_1}(\tau_2)+d_{Z_1}(z_\rho) \leq \frac{|V(Z_1)|+1}{2}. \tag{27}$$

.- $Z_2 = C(u_\rho, z_\rho)$

Tenemos que $\tau_2 t \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_2)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = z_\rho \overrightarrow{C} u_k u u_\rho \overleftarrow{C} \tau_2 t \overrightarrow{C} z_\rho$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_2}(\tau_2) = 0$. Así,

$$d_{Z_2}(\tau_2)+d_{Z_2}(z_\rho) \leq \frac{|V(Z_2)|+1}{2}. \tag{28}$$

.- $Z_3 = C(z_\rho, u_k)$

Si $z_\rho t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_3)$, $\tau_2 t^- \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = z_\rho t \overrightarrow{C} u_k u u_\rho \overleftarrow{C} \tau_2 t^- \overleftarrow{C} z_\rho$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_3}(\tau_2) \leq \frac{|V(Z_3)|-1}{2} - (d_{Z_3}(z_\rho)-1)$. Así,

$$d_{Z_3}(\tau_2)+d_{Z_3}(z_\rho) \leq \frac{|V(Z_3)|-1}{2}+1. \tag{29}$$

.- $Z_4 = C[u_k, \tau_2)$

Tenemos que $z_\rho t \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_4)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = \tau_2 \overrightarrow{C} u_\rho u u_k \overleftarrow{C} z_\rho t \overrightarrow{C} \tau_2$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_4}(z_\rho) = 0$. Así,

$$d_{Z_4}(\tau_2) + d_{Z_4}(z_\rho) \leq \frac{|V(Z_4)| + 1}{2}. \tag{30}$$

Luego, de (27), (28), (29), (30) y Lema 2.3, tenemos que:

$$\begin{aligned} d_G(\tau_2) + d_G(z_\rho) &\leq \left(\frac{|V(Z_1)| + 1}{2}\right) + \left(\frac{|V(Z_2)| + 1}{2}\right) + \left(\frac{|V(Z_3)| - 1}{2} + 1\right) + \left(\frac{|V(Z_4)| + 1}{2}\right) \\ &= \frac{|C| - 2 + 2}{2} + 1 = \frac{|C|}{2} + 1 < n + 1 \end{aligned}$$

Afirmación V: $d_G(\tau_1) + d_G(\tau_2) < n + 1$, con $\tau_1 \in C(v_{\frac{k}{2}}, u_{\frac{k}{2}+1}) \cap B$ y $\tau_2 \in C(u_k, v_1) \cap A$.

En efecto: Sean $\tau_1 \in C(v_{\frac{k}{2}}, u_{\frac{k}{2}+1}) \cap B$ y $\tau_2 \in C(u_k, v_1) \cap A$. Consideremos los siguientes subgrafos de C. Ver Figura 8.

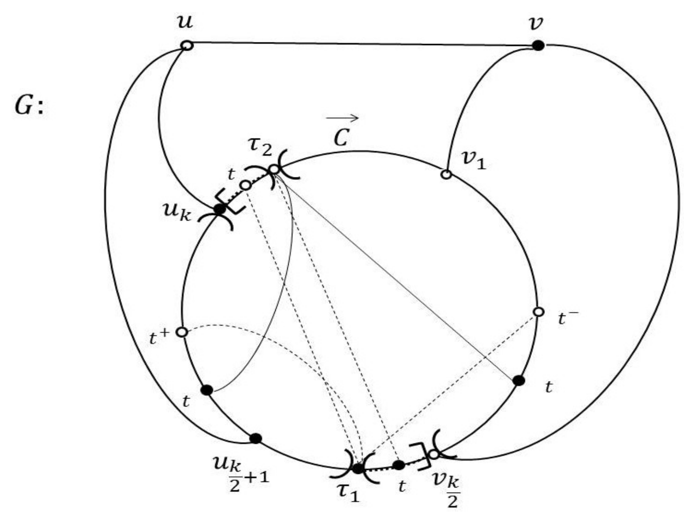

Figura 8: Representa la partición del ciclo C en Z_1, Z_2, Z_3 y Z_4

.- $Z_1 = C(\tau_2, v_{\frac{k}{2}})$

Si $\tau_2 t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_1)$, $\tau_1 t^- \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = \tau_2 t \overrightarrow{C} v_{\frac{k}{2}} v u u_k \overleftarrow{C} \tau_1 t^- \overleftarrow{C} \tau_2$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_1}(\tau_1) \leq \frac{|V(Z_1)|-1}{2} - (d_{Z_1}(\tau_2) - 1)$. Así,

$$d_{Z_1}(\tau_1) + d_{Z_1}(\tau_2) \leq \frac{|V(Z_1)| - 1}{2} + 1. \tag{31}$$

.- $Z_2 = C[v_{\frac{k}{2}}, \tau_1)$

Tenemos que $\tau_2 t \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_2)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = \tau_1 \overrightarrow{C} u_k u v v_{\frac{k}{2}} \overleftarrow{C} \tau_2 t \overrightarrow{C} \tau_1$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_2}(\tau_2) = 0$. Así,

$$d_{Z_2}(\tau_1) + d_{Z_2}(\tau_2) \leq \frac{|V(Z_2)| + 1}{2}. \tag{32}$$

.- $Z_3 = C(\tau_1, u_k)$

Si $\tau_2 t \in E(G)$, para toda $t \in V(Z_3)$, $\tau_1 t^+ \notin E(G)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = \tau_2 t \overleftarrow{C} \tau_1 t^+ \overrightarrow{C} u_k u v v_{\frac{k}{2}} \overleftarrow{C} \tau_2$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $d_{Z_3}(\tau_1) \leq \frac{|V(Z_3)|+1}{2} - d_{Z_3}(\tau_2)$. Así,

$$d_{Z_3}(\tau_1) + d_{Z_3}(\tau_2) \leq \frac{|V(Z_3)| + 1}{2}. \tag{33}$$

.- $Z_4 = C[u_k, \tau_2)$

Tenemos que $\tau_1 t \notin E(G)$, para toda $t \in V(Z_4)$. En caso contrario, existe el ciclo

$$C_1 = \tau_2 \overrightarrow{C} v_{\frac{k}{2}} v u u_k \overleftarrow{C} \tau_1 t \overrightarrow{C} \tau_2$$

tal que $|V(C_1) \cap U| > |V(C) \cap U|$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $d_{Z_4}(\tau_1) = 0$. Así,

$$d_{Z_4}(\tau_1) + d_{Z_4}(\tau_2) \leq \frac{|V(Z_4)| + 1}{2}. \tag{34}$$

Luego, de (31I), (32II), (33III), (34IV) y Lema 2.3, tenemos que:

$$d_G(\tau_1) + d_G(\tau_2) \leq \left(\frac{|V(Z_1)| - 1}{2} + 1\right) + \sum_{i=2}^{4} \left(\frac{|V(Z_i)| + 1}{2}\right) = \frac{|C| - 2 + 2}{2} + 1 = \frac{|C|}{2} + 1 < n + 1$$

Las demostraciones de las siguientes afirmaciones, son análogas a las anteriores.

Afirmación VI: $d_G(z_\lambda) + d_G(z_\rho) < n + 1$, con $z_\lambda \in \Gamma \cap A$ y $z_\rho \in \Gamma \cap B$.

Afirmación VII: $d_G(y_\delta) + d_G(\tau_2) < n + 1$, con $y_\delta \in \Gamma \cap B$.

Afirmación VIII: $d_G(z_\lambda) + d_G(\tau_1) < n + 1$, con $z_\lambda \in \Gamma \cap A$.

Así, de las afirmaciones anteriores, $d_G(a) + d_G(b) \leq n$, para todo par de vértices, no adyacentes, $a \in \Sigma_1 \cap A$ y $b \in \Sigma_1 \cap B$. $\square$

3 Resultados Principales

Teorema 3.1. *Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado k-conexo de orden $2n$ y U un subconjunto balanceado de $V(G)$. Si $\Delta_{1,1}(S) \geq n + 1$, para todo conjunto independiente S, con $S \cap A \neq \emptyset$ y $S \cap B \neq \emptyset$, de cardinalidad $(\frac{\kappa(U)}{2} + 1)$ en $G[U]$, entonces G tiene un ciclo que contiene todos los vértices de U.*

Demostración. Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado conexo de orden $2n$ y U un subconjunto balanceado de $V(G)$. Supongamos que $\Delta_{1,1}(S) \geq n + 1$, para todo conjunto independiente S, con $S \cap A \neq \emptyset$ y $S \cap B \neq \emptyset$, de cardinalidad $(\frac{\kappa(U)}{2} + 1)$ en $G[U]$, y que G no tiene un ciclo que contenga todos los vértices de U.

Sean C un ciclo de G que contiene la mayor cantidad, como sea posible, de vértices de U, $k = \kappa(U)$ y $T \subseteq V(G)$ el conjunto de vértices separadores de los elementos de U tal que $|V(T) \cap A| = |V(T) \cap B| \geq 3$. Entonces, consideremos los siguientes casos:

Caso I: $V(G) - V(C)$ es un conjunto independiente.

Como G es balanceado, el conjunto $V(G) - V(C)$ contiene al menos un vértice aislado u en $U \cap A$ y al menos un vértice aislado v en $U \cap B$.

Por el teorema de Menger, existen $\frac{k}{2}$ caminos vértices disjuntos P_i que conectan a v con C; es decir, existen $\frac{k}{2}$ caminos internamente vértices disjuntos vP_iv_i con $v_i \in V(C)$, y $\frac{k}{2}$ caminos vértices disjuntos Q_j que conectan a u con C; es decir, $\frac{k}{2}$ caminos internamente vértices disjuntos vQ_ju_j con $u_j \in V(C)$, tal que los índices de v_i y u_j se incrementan de acuerdo a la orientación de C y $V(P_i) \cap V(Q_j) = \emptyset$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que los vértices $v_1, v_2, ..., v_{\frac{k}{2}}$ son los vecinos de P_i en $A \cap V(C)$ y los vértices $u_{\frac{k}{2}+1}, u_{\frac{k}{2}+2}, ..., u_k$ son los vecinos de Q_j en $B \cap V(C)$ tal que $u_k^+ = v_1$. Por la escojencia del ciclo, $V(C(v_i, v_{i+1})) \cap U \neq \emptyset$, para toda $i = 1, 2, ..., \frac{k}{2} - 1$ y $V(C(u_j, u_{j+1})) \cap U \neq \emptyset$, para toda $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, ..., k - 1$.

Consideremos, $\alpha_i = max\{p_t : y_{p_t} \in U \cap C(v_i, v_{i+1}), t \in Z^+\}$, para toda $i = 1, 2, ..., \frac{k}{2} - 1$, y $\beta_j = min\{q_t : z_{q_t} \in U \cap C(u_j, u_{j+1}), t \in Z^+\}$, para toda $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, ..., k - 1$. Sean los conjuntos $\Gamma = \{y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}, ..., y_{\alpha_{\frac{k}{2}-1}}\}$ y $\Omega = \{z_{\beta_{\frac{k}{2}+1}}, z_{\beta_{\frac{k}{2}+2}}, ..., z_{\beta_{k-1}}\}$. Entonces, por el Lema 2.1, $\Sigma = \Gamma \cup \Omega \cup \{u, v\}$ es un conjunto independiente en $G[U]$ tal que $|V(\Sigma_1) \cap A| \geq 1$ y $|V(\Sigma_1) \cap B| \geq 1$.

Por otro lado, por el Lema 2.2, $d_G(a) + d_G(b) \leq n$, para todo par de vértices a y b, en clases diferentes de Σ. En consecuencia, existe un conjunto independiente $S_1 \subseteq \Sigma$, en $G[U]$, de cardinalidad $(\frac{k}{2} + 1)$, tal que $|V(S_1) \cap A| \geq 1$ y $|V(S_1) \cap B| \geq 1$, y $d_G(a) + d_G(b) \leq n$, para todo par de vértices a y b, en clases diferentes de S_1.

Caso II: $V(G) - V(C)$ es un conjunto de componente H_p, tal que $|H_p| \geq 2$, para toda p.

Sea, sin pérdida de generalidad, H una componente conexa de $V(G) - V(C)$ isomorfa al grafo $K_{1,1}$, con vértices extremos $u \in U \cap A$ y $v \in U \cap B$.

Por el teorema de Menger, existen $\frac{k}{2}$ caminos vértices disjuntos P_i que conectan a v con C; es decir, existen $\frac{k}{2}$ caminos internamente vértices disjuntos vP_iv_i con $v_i \in V(C)$, y $\frac{k}{2}$ caminos vértices disjuntos Q_j que conectan a u con C; es decir, $\frac{k}{2}$ caminos internamente vértices disjuntos vQ_ju_j con $u_j \in V(C)$, tal que los índices de v_i y u_j se incrementan de acuerdo a la orientación de C y $V(P_i) \cap V(Q_j) = \emptyset$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que los vértices $v_1, v_2, ..., v_{\frac{k}{2}}$ son los vecinos de P_i en $A \cap V(C)$ y los vértices $u_{\frac{k}{2}+1}, u_{\frac{k}{2}+2}, ..., u_k$ son los vecinos de Q_j en $B \cap V(C)$. Por la escojencia de C, $V(C(v_i, v_{i+1})) \cap U \neq \emptyset$, para toda $i = 1, 2, ..., \frac{k}{2} - 1$, $V(C(u_j, u_{j+1})) \cap U \neq \emptyset$, para toda $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, ..., k - 1$, $V(C(v_{\frac{k}{2}}, u_{\frac{k}{2}+1})) \cap U \neq \emptyset$ y $V(C(u_k, v_1)) \cap U \neq \emptyset$.

Consideremos, $\alpha_i = min\{p_t : y_{p_t} \in U \cap C(v_i, v_{i+1}), t \in Z^+\}$, para toda $i = 1, 2, ..., \frac{k}{2} - 1$, $\beta_j = min\{q_t : z_{q_t} \in U \cap C(u_j, u_{j+1}), t \in Z^+\}$, para toda $j = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, ..., k - 1$, τ_1 el primer vértice de, sin pérdida de generalidad, $U \cap B$ en $V(C(v_{\frac{k}{2}}, u_{\frac{k}{2}+1}))$ y τ_2 el primer vértice de, sin pérdida de generalidad, $U \cap A$ en $V(C(u_k, v_1))$.

Sean los conjuntos $\Gamma = \{y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}, ..., y_{\alpha_{\frac{k}{2}-1}}\}$ y $\Omega = \{z_{\beta_{\frac{k}{2}+1}}, z_{\beta_{\frac{k}{2}+2}}, ..., z_{\beta_{k-1}}\}$. Entonces, por el Lema 2.3, $\Sigma_1 = \Gamma \cup \Omega \cup \{\tau_1, \tau_2\} \subseteq \Sigma$ es un conjunto independiente en $G[U]$ tal que $|V(\Sigma_1) \cap A| \geq 1$ y $|V(\Sigma_1) \cap B| \geq 1$; por otro lado, por el Lema 2.4, $d_G(a) + d_G(b) \leq n$, para todo par de vértices a y b, en clases diferentes de Σ_1. En consecuencia, existe un conjunto independiente $S_1 \subseteq \Sigma_1$ en $G[U]$, de cardinalidad $(\frac{k}{2} + 1)$, tal que $|V(S_1) \cap A| \geq 1$, $|V(S_1) \cap B| \geq 1$ y $d_G(a) + d_G(b) \leq n$, para todo par de vértices a y b, en clases diferentes de S_1.

Por consiguiente, de los Casos I y II, existe un conjunto independiente S_1 en $G[U]$, de cardinalidad $(\frac{k}{2} + 1)$, tal que $\Delta_{1,1}(S_1) < n + 1$, lo cual es una contradicción. Así, G contiene un ciclo que incluye todos los vértices de U. $\square$

3.1 Ejemplo ilustrativo del Teorema Principal

Sea el siguiente grafo bipartito balanceado conexo $G = (A \cup B, E)$, con $A = \{a_1, a_2, u_1, u_2, c_1, c_2, c_3\}$ y $B = \{b_1, b_2, v_1, v_2, d_1, d_2, d_3\}$, y sea $G[U]$ el subgrafo inducido por el subconjunto balanceado $U = \{a_1, a_2, u_1, u_2, b_1, b_2, v_1, v_2\}$ de $V(G)$, Figura 9

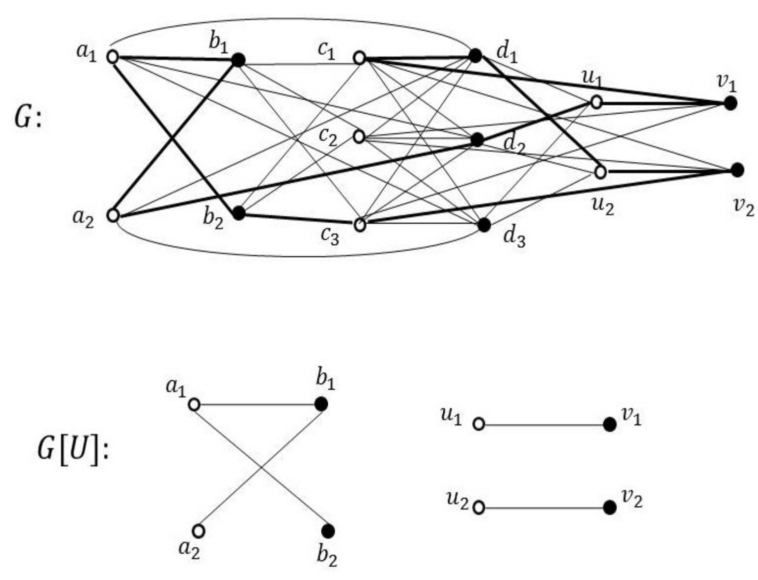

Figura 9: Representa el grafo bipartito $G = (k_{2,2} \cup 2K_{1,1}) + K_{3,3}$ y $G[U]$

Observemos en la Figura 9, que $k(U) = 6$. Sean $S_1 = \{a_2, b_2, u_1, v_2\}$, $S_2 = \{a_2, b_2, u_2, v_1\}$, $S_3 = \{a_2, b_2, u_1, u_2\}$, $S_4 = \{a_2, b_2, v_1, v_2\}$, $S_5 = \{a_1, a_2, u_1, v_2\}$, $S_6 = \{a_1, a_2, u_2, v_1\}$ y $S_7 = \{a_1, a_2, v_1, v_2\}$ conjuntos independientes de cardinalidad $(\frac{k(U)}{2} + 1) = 3 + 1 = 4$ en $G[U]$. Como $\Delta_{1,1}(S) \geq n + 1 = 7 + 1 = 8$ para todo S_i desde $i = \overline{1,7}$, se tiene que G cumple con la hipótesis del teorema principal; por lo tanto, existe el ciclo:

$$C =: a_2 b_1 a_1 b_2 c_3 v_2 u_2 d_1 c_1 v_1 u_1 d_2 a_2$$

que contiene todos los vértices de U.

Corolario 1. *Sean $k \geq 2$ y $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado k-conexo de orden $2n$. Sean $V_1, V_2, ..., V_{\frac{k}{2}}$ subconjuntos balanceados de $V(G)$ y $V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_{\frac{k}{2}}$. Si para cada $i = 1, 2, ..., \frac{k}{2}$ y para cada par de vértices independientes, en particiones distintas, u y v en V_i, $d_G(u) + d_G(v) \geq n + 1$, entonces G tiene un ciclo que contiene todos los vértices de V.*

Demostración. Sean $k \geq 2$ y $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito balanceado k-conexo de orden $2n$. Sean $V_1, V_2, ..., V_{\frac{k}{2}}$ subconjuntos balanceados de $V(G)$ y $V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_{\frac{k}{2}}$. Supongamos que para cada $i = 1, 2, ..., \frac{k}{2}$ y para cada par de vértices independientes, en clases distintas, u y v en V_i, $d_G(u) + d_G(v) \geq n + 1$. Sea S' un conjunto independiente en $V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_{\frac{k}{2}}$, con $S' \cap A \neq \emptyset$ y $S' \cap B \neq \emptyset$, de cardinalidad $\frac{k(V)}{2} + 1$. Como $|S'| = \frac{k(V)}{2} + 1 > \frac{k}{2}$, existen dos vértices independientes, en clases diferentes, tales que $u, v \in S' \cap V_i$ para algún $i = 1, 2, ..., \frac{k}{2}$. Por hipótesis, $d_G(u) + d_G(v) \geq n + 1$, entonces $\Delta_{1,1}(S') \geq n + 1$. Luego, para cada conjunto independiente S en $V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_{\frac{k}{2}}$, existen dos vértices independientes en clases diferentes, tales que $\Delta_{1,1}(S) \geq n + 1$, de aqui G satisface las hipótesis del Teorema 3.1, en consecuencia, G tiene un ciclo que contiene todos los vértices de V. □

Referencias

[1] Diestel, R. *Graph Theory.* Second Edition, Springer, 2000.

[2] Yamashita, T. *On degree sum conditions for long cycles and cycles through specified vertices*, Discrete Mathematics., **308**(2008), 6584–6587.