



Encuentro Educativo

ISSN 1315-4079 ~ Depósito legal pp 199402ZU41

Vol. 13(2) mayo-agosto 2006: 203 - 222

Representaciones cognitivas sobre el concepto de fracción

Yaneth Ríos

Centro de Estudios Matemáticos y Físicos (CEMAFI).

Facultad de Humanidades y Educación.

Universidad del Zulia. Maracaibo, Venezuela.

E-mail: yanrios@latinmail.com

Resumen

Este artículo muestra los resultados de un estudio de caso en el cual se determina cuales son algunos de los preconceptos respecto al concepto de fracción, que tienen los alumnos que ingresaron en la Licenciatura en Educación, Mención Matemáticas y Física. Esta investigación tiene como bases teóricas las teorías: del procesamiento de la información, resolución de problemas y la de errores. En términos generales se observó que aunque los problemas y ejercicios planteados, están contemplados en los programas de la segunda etapa de la Educación Básica no fueron resueltos en su mayoría por los individuos de la muestra. Las definiciones muestran incoherencia en cuanto a la redacción, se presentan ideas sin sentido, hacen referencia a contenidos procedimentales en lugar de los conceptuales y se observó un pobre conocimiento del significado de los algoritmos aplicados al operar las fracciones.

Palabras clave: Representaciones externas e internas, redes semánticas y fracciones.

Cognitives Representations of the Concept of Fraction

Abstract

This article offers the results of a case study in which some of the pre-concepts students who are entering the undergraduate program in Education, Area Mathematics and Physics in the first period 2001, have with respect to the concept of fractions. This research is based on the following theories: information processing, the resolution of problems, and errors. In general it is observed that though the problems and exercises confronted are contemplated in the programs of the second stage of Basic Education, they were not successfully resolved by the majority of the individuals sampled. The definitions are incoherently written, present ideas without sense, and make reference to procedural contents instead of conceptual concepts. Poor knowledge of algorithms is observed in the application operations with fractions.

Key words: External and internal representations, semantic networks, and fractions.

Introducción

Uno de los objetivos de la educación venezolana es que el alumno desarrolle una actitud reflexiva y crítica frente a la realidad que lo rodea, que además adquiera habilidades y destrezas para transformar el mundo para beneficio propio y de la comunidad.

El aprendizaje de todas las ciencias contribuye al desarrollo de estas competencias conceptuales, procedimentales y actitudinales, de ahí que es interesante preguntarse ¿qué hace a la Matemática diferente de las demás áreas del conocimiento?, la respuesta quizás sea, las herra-

mientas que utiliza para explicar lo que nos circunda; en este sentido la Matemática hace uso de su contenido, principios de estructuración, teoremas, axiomas, procedimientos, estilos de razonamientos entre algunos, mediante los cuales hace un estudio tanto cualitativo como cuantitativo del objeto por conocer. Todo esto la puede llevar a encontrar regularidades que le permitan realizar una caracterización de esos fenómenos y posteriormente le permiten al individuo aplicar estos resultados a diversos campos del conocimiento. A este proceso se le conoce como abstracción, y el mismo permite trabajar con las regularida-

des de los fenómenos olvidando el contexto en el cual está inmerso y sus particularidades.

¿Por qué enseñar matemáticas?

Es innegable que la matemática tiene las herramientas que las otras disciplinas científicas utiliza. Pero no sólo es este carácter utilitario el que determina la importancia de enseñarla. Lo que la hace diferente de las demás ciencias es el hecho de que al hacer matemática se desarrollan habilidades y destrezas que le dan un sello característico a profesionales de otras disciplinas, exigiéndoles un dominio de competencias numéricas. Esto último hace que la enseñanza de la matemática deba estar dirigida a cumplir este propósito en cada carrera; de ahí que se debe hacer un estudio sobre el perfil, relacionadas con la Matemática, que deben desarrollar los profesionales, para considerarlas en los programas de las asignaturas de contenido matemático en el nivel superior.

Por ejemplo, el ingeniero, como lo afirma Jiménez (1999), la utiliza para resolver con creatividad los problemas que se le plantean en su ejercicio profesional, en consecuencia necesita de un entrenamiento en el análisis científico de los problemas. Por otro lado, tiene aplicaciones prácticas en la construcción de objetos, tales como: aparatos con aplicaciones en la medicina (tomógrafos axiales computarizados) y la

agricultura, entre otros. Además se señala que los conceptos matemáticos surgen para resolver problemas que han quedado pendientes.

A este respecto, Martín y Cols (1999) señalan que gracias a los ordenadores, a las técnicas de análisis numérico y al uso de la estadística se hace posible el diseño de modelos matemáticos para abordar problemas complejos de áreas tales como: biología, sociología, economía, ingeniería genética y meteorología. Otro ejemplo, en el mismo orden de ideas, es el hecho que las telecomunicaciones e informática, tienen sus bases iniciales en la lógica moderna de Boole y los modelos matemáticos de los ordenadores de Turing, Von Neuman y Wiener.

Por otro lado, la matemática ha estado presente en descubrimientos científicos que han modificado la concepción que tiene el hombre sobre el mundo que lo rodea, tal como son las teorías: heliocéntrica del mundo, de relatividad, de gravitación, de evolución de las especies, entre otras. Ella ha estado en íntima relación con la filosofía y la lógica a través de personajes matemáticos (Descartes, Pascal, Leibniz, Boole, Morgan, Frege, Russell y Bolzano).

1. Realidad de nuestras aulas de matemáticas

Cuando se introducen o manejan los conceptos matemáticos, la gran mayoría de los docentes lo hacen en forma expositiva; es decir, tal

cual como son presentados los saberes sabios por la comunidad científica; en otras palabras descontextualizados de los problemas que hicieron surgir esos conocimientos y rara vez son introducidos en problemas donde las nociones matemáticas funcionen como herramientas.

Uno de los objetivos de la enseñanza de la matemática es modelar la realidad. Cuando el niño aprende le asigna a los objetos matemáticos significantes tales como las representaciones, las cuales en muchas oportunidades no corresponden a la realidad, pues la información que es representada es escogida por el alumno y este seleccionará aquella que le sea significativa y pueda conectar con los conocimientos previos que él posee; esta información representada es la que estará a disposición del aprendiz para ser relacionada con otros significantes. Se observa así; que parte de la información enseñada es perdida, pues el alumno no logra establecer representaciones para ésta.

El docente, muchas veces, parte del hecho que todos los alumnos tienen los mismos conocimientos previos e igual grado de madurez en los procesos mentales para la organización, utilización de la información y valores referidos al autoconcepto. Es a partir de ellos que se trabajan los contenidos matemáticos, no se toman en cuenta las capacidades individuales en cuanto a: la construcción del conocimiento, los

conocimientos previos y procesos metacognitivos de los estudiantes.

El docente debe considerar, en su quehacer además del conocimiento por impartir; qué saben los alumnos, cómo aprenden los alumnos, qué estrategias de aprendizaje utilizan, cómo controlan su proceso de aprendizaje, cómo realizar la transposición del saber sabio al saber enseñado, qué valores tienen, qué autoconceptos tienen de sí mismos, qué habilidades posee para organizar la información. Además se puede agregar qué concepción tiene: tanto el docente como el alumno: de la ciencia por enseñar y a aprender.

Por las razones antes señaladas, se necesitan docentes investigadores, que indaguen: el por qué de los procedimientos matemáticos, las formas de aprender los alumnos, estrategias de aprendizaje y estrategias de enseñanza.

A este respecto, Jiménez (1999) señala que la enseñanza de la matemática está centrada en la mera información de ideas de la disciplina; además opina que si en lugar de esto se hiciera énfasis en la generación de ideas se pudiera explotar con mayor facilidad el extenso mundo de relaciones que nos ofrece el conocimiento científico. Agrega que además, que la discapacidad de los venezolanos en cuanto a la comprensión estética (pues no recibimos formación para adquirirla) hace que no puedan entender la be-

lleza de la matemática y la conciben como un árbol seco lleno de espinas, al cual han de treparse.

El método de enseñanza predominante en nuestras aulas es el de presentar el conocimiento matemático como contenido que el alumno debe aprender o memorizar, seguido de "problemas" y/o ejercicios mediante los cuales "apliquen" estos conceptos, sin transformarlos, así mismo los alumnos aprenden que las estrategias que deben aplicar para resolver "los problemas" son las mismas que ha aplicado el docente en el desarrollo de las clases. Rara vez, el docente propone situaciones problemáticas donde el alumno debe utilizar otros saberes matemáticos distintos a los que se están desarrollando en ese momento, y; por otro lado estas situaciones no desarrollan, en el estudiante, las habilidades de creatividad, que le permitan aplicar nuevas estrategias de solución o nuevos conocimientos matemáticos.

La estrategia de enseñanza de la matemática, que prevalece en los salones, está centrada en exposición de algoritmos. Estos últimos nos permiten resolver operaciones entre elementos matemáticos descontextualizados que no se adapta a ninguna situación de interés para nuestros estudiantes. No se indaga como son los procesos; de aprendizaje de los alumnos y no se toman en cuenta las habilidades y destrezas previas del estudiante. Esto hace que no se desarro-

llen y potencialicen las mismas; y mucho menos, se le hace tomar conciencia a los alumnos de que las poseen; en otras palabras, no se trabajan con nuestros alumnos los procesos metacognitivos.

La situación, antes descrita, acrecienta la concepción de la Matemática como una ciencia hecha, que no tiene nada por descubrir. Se hace incapié en los resultados más no en los procesos aplicados. La justificación de los algoritmos es desconocida por completo; pues cuando se les pregunta a los estudiantes el por qué de estos procedimientos, simplemente expresan que así se los enseñaron.

La experiencia permite señalar que los alumnos a pesar de aprobar (regular o excelentemente) las pruebas escritas, olvidan los conceptos, teoremas y procedimientos matemáticos. Esto quizás se deba a que los docentes:

- No la relacionan con los contenidos matemáticos entre sí, ni con los contenidos de otras disciplinas, ni con el contexto del estudiante.
- No exigen el uso correcto del vocabulario matemático.
- Trabajan casos particulares y no generalidades.
- No utilizan la historia de la matemática como una estrategia de enseñanza.
- No exigen justificaciones ante las repuestas dadas por los alumnos.

- Conciben la matemática como una ciencia hecha y no por hacer.
- Conciben la matemática como la ciencia de los números y no toman en cuenta sus generalidades.
- Conciben la matemática como la ciencia de la exactitud como la entiende el positivismo lógico y, no como una ciencia que se construye.

Las fracciones, resultados de su aprendizaje

El Sistema Nacional de Evaluación de los Aprendizajes (SINEA, 1998) realizó una investigación con una muestra de estudiantes de todos los estados de Venezuela en el año 1998, en la cual se obtuvieron los siguientes resultados:

Para tercer grado: El 11,2% de la muestra no supo discriminar la mayor fracción entre tres fracciones de igual denominador y el 26,8% de la muestra no reconoce la fracción que representa la parte rayada en una figura. Los especialistas concluyeron que el grupo que no logró realizar correctamente las preguntas presentan las siguientes dificultades: No saben comparar fracciones de iguales denominadores, confunden los conceptos de mayor que y menor que, no relacionan la parte rayada de una figura con el concepto de fracción y desconocen la representación gráfica de fracciones, en conclusión, no tienen clara la relación de orden y no dominan algu-

nos conceptos relacionados al tema de fracciones.

En sexto grado: El 15,2% de la muestra no sabe discriminar un número natural entre tres fracciones, el 45,5% no sabe discriminar una milésima, como fracción, entre una décima, una centésima y una diez milésima, el 38,4% no sabe multiplicar fracciones, el 49,7% no sabe discriminar la propiedad conmutativa para el producto de fracciones entre la propiedad distributiva, asociativa para la suma y la existencia del inverso multiplicativo y el 53,4% desconoce las aplicaciones de las propiedades: conmutativa para el producto y asociativa para la suma, en las operaciones entre fracciones. Los especialistas concluyeron que el grupo que no logró realizar correctamente las preguntas presentan dificultades en cuanto a: la noción del conjunto de los números naturales, la representación de la milésima como fracción, la equivalencia entre fracciones, relación de orden entre fracciones con diferentes denominador, concepto de fracción y expresión decimal, la propiedad conmutativa para el producto, la propiedad asociativa para la suma y el algoritmo de la multiplicación de fracciones; además confunden el algoritmo de la multiplicación con la suma de numeradores y denominadores y el algoritmo de la multiplicación con el de la división.

Por lo expuesto anteriormente, los docentes estamos llamados a

realizar análisis descriptivos y explicativos de la situación descrita anteriormente y tomar esto como punto de partida del proceso de enseñanza aprendizaje del contenido referido a las fracciones en el nivel superior de nuestro Sistema Educativo. Por tal motivo se plantean las siguientes interrogantes, con respecto a los alumnos que ingresan al programa de la Licenciatura de Educación, Matemática y Física de la Universidad del Zulia: ¿Cuáles son los errores que frecuentemente cometen los alumnos con respecto al tema de fracciones?, ¿Cuáles son las representaciones externas que ponen de manifiesto los alumnos con respecto al concepto de fracción?, ¿Pueden los alumnos justificar correctamente las técnicas algorítmicas utilizadas para realizar operaciones entre las fracciones? y ¿Cuáles son los preconceptos que tienen los alumnos con respecto al tema?

Para remediar la situación problemática descrita anteriormente, es necesario en primera instancia, confirmar o negar la opinión, generalizada, a cerca del escaso dominio de conceptos matemáticos necesarios para acceder al tercer nivel, en egresados del segundo nivel de nuestro sistema educativo venezolano. Para realizar esta labor, es conveniente que los docentes del nivel superior describan y expliquen la situación señalada, esto les permitirá: en primer lugar; determinar los conceptos previos que

dominan los alumnos de bachillerato y; en segundo lugar, determinar cuál deberá ser el punto de partida en la enseñanza de los conceptos matemáticos relacionados a estos conceptos previos. Así pues, esta investigación permitirá realizar una diagnosis con respecto a los preconceptos que tienen los alumnos que ingresan a la Universidad del Zulia, con respecto al concepto de fracción, lo cual permitirá planificar las acciones didácticas a seguir para la enseñanza de este contenido.

La experiencia que como docente he adquirido durante cuatro semestres, en la asignatura de Fundamentos de la Matemática (primera materia del pensum de estudios del área de matemática de la Licenciatura de Educación, Mención Matemática y Física) permite indicar que uno de los conceptos con mayor conflictividad para los alumnos es el de Fracciones, a pesar de ser un contenido que se presenta de forma explícita en la segunda etapa y séptimo y octavo grado de la tercera etapa de la educación básica del sistema educativo venezolano.

El objetivo general de esta investigación fue determinar los conocimientos previos que tienen los alumnos que ingresaron a la Licenciatura de Educación, Mención Matemática y Física, con respecto a: fracciones, relación entre porcentaje y fracción, epistemología o historia del concepto de fracción, relación entre regla de tres y fracciones,

relación entre proporciones y fracciones, fracciones equivalentes, relación entre los decimales y las fracciones, operaciones entre fracciones (suma, resta, multiplicación y división) y resolución de problemas.

Los objetivos específicos son los siguientes:

- Determinar los tipos de errores cometidos por los alumnos con respecto a los conceptos mencionados.
- Determinar la frecuencia de las respuestas dadas por los alumnos.
- Determinar la frecuencia con que los alumnos utilizan técnicas algorítmicas, sin justificaciones válidas.
- Realizar un análisis descriptivo y explicativo de los conocimientos previos que poseen los alumnos con respecto a los conceptos mencionados.
- Determinar el tipo de representación externa utilizada, más frecuentemente, por los estudiantes.

Los sujetos de estudio fueron 72 alumnos cursantes de la asignatura Fundamentos de Matemática, materia que pertenece al plan de estudios de la Licenciatura de Educación: Matemática y Física de la Universidad del Zulia; de estos 72 alumnos, 60 ingresaron del nivel medio diversificado y profesional de nuestro sistema educativo y los otros 12 eran estudiantes que habían cursado la asignatura anteriormente. Además se utilizó una mues-

tra intencional de 9 alumnos, a los cuales se les realizó una entrevista.

2. Representaciones, procesamiento de la información y resolución de problemas

Son muchas las situaciones que se presentan en el proceso de enseñanza aprendizaje que deben ser analizados por los docentes al momento de planificar este proceso; entre ellos se encuentra como el estudiante procesa la información para resolver los problemas. Por tal motivo se considera que una teoría base de esta investigación es el procesamiento de la información, que a continuación se expone.

La analogía entre mente y computador impulsó la construcción de teorías sobre el llamado procesamiento de información, entre estas la resolución de problemas. Mayer (1982, citado por Maza, 1995) establece las siguientes aportaciones de la Teoría del Procesamiento de la Información en la resolución de problemas:

1. El aprendizaje no es adquisición de nuevas conductas, sino de nuevos conocimientos.
2. Los objetivos educativos deben ser cognitivos ante que conductuales.

El procesamiento de la información apoya el hecho que para que el individuo resuelva problemas, en el proceso de resolución (desde el inicio hasta el final), realiza representacio-

nes internas de los estados del problema que le permiten ir resolviéndolo. Desde esta perspectiva estamos ante un problema, como lo plantea Lester (1983, citado por Maza, 1995), pues no existe un camino obvio que garantice la solución.

Representaciones internas

Para Newell y Simon (1972, citado por Maza, 1995) una **representación interna** está formada por un conjunto de nodos generados por todos los movimientos lícitos. Cada nodo es un posible estado del conocimiento, es decir, lo que sabe el resolutor en un momento concreto acerca del problema. Estos estados del conocimiento no pueden ser abordados al mismo tiempo (pues el procesamiento de la información es serial); se escogerá aquel que permita alcanzar el resultado final.

En el procesamiento de la información intervienen dos tipos de memorias: la memoria activa o de trabajo y la memoria de largo plazo. Las representaciones internas se encuentran en la memoria activa, pues es aquí donde se ejecutan distintas acciones para transformar la información y así los nuevos contenidos desplazan a los viejos. Así pues las representaciones internas van cambiando en la medida que cambian las estrategias.

De lo anterior se desprende que la comprensión del problema se en-

tiende como una interrelación entre las distintas representaciones e interpretaciones sucesivas. Según esta teoría, este sería el proceso de solución de problemas:

1. Representación interna.
2. Evaluación y elección de un nodo.
3. Aplicación de estrategias (en algunos casos establecimiento de submetas, donde interviene la memoria a largo plazo).
4. Construcción de otra representación interna.

Representaciones externas

Las representaciones externas además de suponer una apropiación del conocimiento, pone de manifiesto el proceso de reconstrucción del aprendiz. No son una mera traducción de las representaciones internas sino que son consideradas objetos en sí mismas.

Las representaciones externas requieren de operaciones mentales de comprensión y producción que son realizadas por los sistemas internos y las representaciones internas pueden tener consecuencias observables (las cuales son representaciones externas).

Entre las representaciones externas (Pozo y Martí, 2000) se tienen: las no permanentes como el lenguaje oral o de signos y las permanentes como la escritura, mapas, notación numérica, dibujos, ilustraciones, gráficos y diagramas.

Otra clasificación es la realizada por Lesh, Landau y Hamilton (1983, citados por Maza, 1995) y Lesh, Post y Boht (1987, citados por Maza, 1995):

1. Los modelos manipulativos: se aproximan a la realidad por su carácter tridimensional.
2. Los dibujos y diagramas: los diagramas son más dinámicos que los dibujos.
3. Lenguaje hablado y escrito: en cada uno se distinguen dos tipos de lenguajes: el formal y el informal.
4. Símbolos escritos: supone un esfuerzo mayor por lo que en muchos casos no son representaciones espontáneas sino tema de aprendizaje.

Maza (1995) plantea que el orden de complejidad de las representaciones externas es el siguiente: lenguaje informal, representaciones manipulativas, icónicas, lenguaje formal y representaciones simbólicas.

Las características de las representaciones externas son (Pozo y Martí, 2000):

1. Existen como objetos independientes del creador, pues existe independencia entre la notación y la producción. Esto produce una dificultad, que la persona que la produce debe tomar en cuenta que la persona que la interpreta sólo podrá observar sus anotaciones y deberá reconstruir el significado a partir de las marcas.

2. Exigen un soporte material y poseen cierta permanencia. Esto las hace de fácil manipulación, transporte, archivo, modificación y accesibilidad en el tiempo. Pueden ser procesadas las veces que quiera, por lo que no dependen de la memoria.
3. Tienen independencia temporal y dependencia espacial.
4. Las anotaciones constituyen sistemas organizados: los símbolos y la disposición espacial de los elementos que las constituyen se ciñen a reglas, las cuales deben ser conocidas por el observador; de ahí que las representaciones externas constituyan un objeto de conocimiento.
5. No son la traducción directa de una realidad, sino que son modelos de esa realidad, con restricciones.

Una característica que deben poseer, según Maza (1995), las representaciones externas, puede ayudar al alumno en el aprendizaje, es la **transparencia**. Esta se define como la capacidad que tiene la representación externa de hacer ver lo más posible los elementos del referente de un problema.

3. Teoría del error

Debido a que los procesos mentales no son visibles, los investigadores deben recurrir a una variedad de métodos de observación que permitan hacer inferencias sobre como procesa la información los seres humanos (Kilpatrick, 1995). En-

tre estos métodos indirectos se encuentran los errores que cometen los alumnos en las producciones matemáticas.

Las investigaciones han demostrado que hay patrones de consistencia en los errores cometidos por los alumnos. Esta situación se debe a que los trabajos efectuados por los sujetos de estudio muestran regularidades en la forma de: realizar las tareas y resolver problemas, por lo que cometen los mismos errores en cierta etapa de su desarrollo evolutivo. Por tal motivo, el análisis de los errores genera aportaciones importantes en el estudio del procesamiento de la información.

Los estudios referidos a los errores han sido conducidos, recientemente, por diversos sectores como la psicología cognitiva, investigaciones didácticas y re-educación matemática entre otros. La teoría del error ha sido estudiada en profundidad por investigadores de la escuela francesa como Brousseau, Radatz, Salin y Borasi entre otros. A continuación se presentan algunos de sus fundamentos (Quevedo, 1999).

Diferencia entre fracaso y error

El fracaso se define desde el punto de vista del alumno y se produce cuando su acción no ha logrado los objetivos propuestos por el docente. El error se define en términos del docente y se produce en las mismas circunstancias del fracaso, la diferencia estriba en la conciencia

que se tenga en la acción ejecutada. Por ejemplo lo que para un niño en cierta etapa de su vida fue un fracaso (ya que en esos momentos no tenía conciencia del por qué no logró su objetivo) en etapas posteriores este fracaso será un error (ya que tendrá conciencia del por qué no logró su propósito).

Características de los errores

- Un error puede ser aleatorio o reproducible: un error es aleatorio cuando ante una misma situación los alumnos tienen altas posibilidades de no cometer el "mismo error", en caso contrario es reproducible.
- Dos errores son el mismo, si aparecen de manera idéntica, en situaciones iguales para el mismo alumno. Esta definición en esta época sería imposible de manipularla, ya que el docente en el tiempo varía sus experiencias didácticas y el alumno, como todo ser humano, es cambiante. Así que dos errores se considerarán los mismos si aparecen en situaciones similares para el mismo o diferentes alumnos.
- Se define como la tasa de reproducción de un error, es decir el número de ocurrencia de un error entre el número de ocasiones donde pueda ocurrir el error.
- En el caso de trabajos algorítmicos, es más fácil determinar con exactitud el número de veces que puede ocurrir un error que en aquellos donde el alumno

tiene posibilidad de elección entre varias alternativas de solución. Para enfrentar este obstáculo se podría colocar a varios alumnos frente al mismo problema para determinar la lista de ocurrencia del error estudiado y así posteriormente ante una evaluación analizar la tasa de reproducción del error de los alumnos.

Clasificaciones de los errores

- **Un primer criterio de clasificación, en cuanto a la relación que tiene con otros conocimientos:** es relacionado cuando puede ser considerado como el resultado de una mala interpretación de otros conocimientos, en otras palabras es el producto de un obstáculo epistemológico; en caso contrario es un error aislado.
- **Un segundo criterio de clasificación, en cuanto al contenido:** son los errores usuales que se producen por el desconocimiento o mal conocimiento del contenido matemático.
- **Un tercer criterio de clasificación, en cuanto a las habilidades del procesamiento de la información:** errores en el procedimiento o estrategia (escogencia incorrecta de la estrategia o aplicación errada de la misma), errores en el razonamiento: deducción de conclusiones erradas y errores en el cálculo.

- **Un cuarto criterio de clasificación, en cuanto a uso de modelos matemáticos:** semántico (escogencia incorrecta del modelo matemático) y sintáctico (utilización errada del modelo).

4. Metodología

El diseño utilizado para esta investigación fue descriptivo y estudio de casos; se describe la condición de ingreso de los alumnos al programa de la Licenciatura de Educación y se hace un estudio de casos en nueve alumnos de la muestra.

Muestra

Los sujetos del estudio fueron 72 alumnos cursantes de la asignatura de Fundamentos de Matemática, asignatura correspondiente al primer semestre de la Licenciatura de Educación, Mención Matemática y Física, de la Escuela de Educación, de la Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad del Zulia, de los cuales 60 ingresaron (en enero del 2001) y los 12 restantes eran alumnos repitientes.

Después de iniciarse el curso de Fundamentos de Matemáticas y de realizar la primera evaluación, se dividió el grupo en los siguientes subgrupos: (en función de su rendimiento): Alto (18 a 20 puntos), Medianamente Alto (15 a 17 puntos), Regular (10 a 14 puntos), Bajo (6 a 10 puntos) y Muy Bajo (1 a 5 puntos). En cada subgrupo se eligieron, al azar, dos alumnos. Así la mues-

tra, para las entrevistas, estuvo conformada por 9 alumnos con diferentes niveles de rendimiento.

Supuestos

Las hipótesis que se plantearon en la investigación fueron las siguientes:

- El aprendizaje de los alumnos no es significativo pues las técnicas de aprendizajes predominantes son la memorización y la utilización de algoritmos.
- Las representaciones externas no utilizadas frecuentemente por los estudiantes son las representaciones icónicas.
- Más del 50% de los estudiantes cometen errores de: contenido, razonamiento y cálculo.

Para operacionalizar las variables (Tabla número uno) se usaron diversas técnicas: en el caso de las estrategias de aprendizaje, errores cometidos por los alumnos y representaciones externas utilizadas por los estudiantes se utilizaron las bases teóricas y para el dominio de contenido se utilizaron los programas de matemática de: cuarto, quinto y sexto grado del segundo nivel, séptimo y octavo grado del tercer nivel de educación básica.

Procedimiento para la recolección de la información

El procedimiento que se siguió para recolectar la información fue el siguiente:

- a. Los 72 alumnos llenaron un cuestionario que constó de 26

items que permitieron determinar los conocimientos previos (académicos) sobre fracciones, contenidos tales como: definición, operaciones entre ellas, relación entre estas y razón, proporción y regla de tres y la solución de problemas. Para la elaboración de este, se utilizó el Cuadro 1.

- b. Se entrevistaron nueve alumnos; a estos se les solicitó una justificación en aquellas respuestas en las cuales se ponen en práctica contenidos procedimentales (es decir, donde se aplican algoritmos y resolución de problemas). Estas entrevistas fueron grabadas mediante una video cámara.

Procedimiento para el procesamiento de la información

El procesamiento de la información se realizó a través de las siguientes técnicas:

- I. Para el dominio de los contenidos de los alumnos encuestados.
 1. Se determinaron todas las respuestas dadas al cuestionario.
 2. Se clasificaron las respuestas en correctas e incorrectas por cada ítem.
 3. Se calculó el porcentaje de respuestas correctas relacionadas a cada uno de los ítems de cada indicador.
 4. Se promediaron las respuestas correctas por indicador.

Tabla 1: Operacionalización de variables

Dimensión	Indicador	Items Del Cuestionario
Dominio del contenido referido a las fracciones	Definición de fracción	2, 3, 4 y 9
	Relación entre porcentaje y fracción	1 y 15
	Historia y epistemología del concepto de fracción	24, 25 y 26
	Relación regla de tres y fracción	22
	Relación entre proporciones y fracciones	16, 17, 18, 19, 20 y 21
	Fracciones equivalentes	8, 10, 11, 12 y 13
	Relación entre decimales y fracciones	6
	Operaciones entre fracciones	5, 14 y 23
	Resolución de problemas	7
Tipo de error	De cálculo	5
	De razonamiento	7
	De contenido referido a:	
	• Definición de fracciones.	2, 3, 4 y 6
	• Relación entre porcentaje y fracción.	1 y 15
	• Historia y epistemología.	24, 25 y 26
	• Fracciones equivalentes.	8, 10, 11, 12 y 13
	• Decimales.	6
• Inverso multiplicativo.	23	
• Proporcionalidad directa.	16, 17, 18, 19, 20, 21 y 22	
Técnicas de aprendizaje empleadas por los alumnos entrevistados	Frecuencia de utilización de algoritmos sin justificación	1, 2, 5, 8 y 23
	Razonamientos con justificaciones válidas	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 12, 13, 21, 22 y 23
Tipos de representaciones externas utilizadas por los alumnos entrevistados	Lenguaje informal	Todos
	Representación icónica	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 15, 16 y 19
	Lenguaje formal	Todos
	Representación simbólica (signos matemáticos)	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 19, 21, 22, 23 y 26

II. Para la frecuencia de errores cometidos por los alumnos encuestados:

1. Se determinaron todas las respuestas dadas al cuestionario.
2. Se estableció la cantidad de respuestas que presentaban los tipos de errores considerados.
3. Se calculó el porcentaje de la cantidad de respuestas que presentaban los errores relacionadas a cada uno de los ítems de cada indicador.
4. Se promedió la frecuencia de errores por indicador.

III. Para las técnicas de aprendizajes utilizadas por los alumnos entrevistados:

1. Se elaboró las redes semánticas de las intervenciones de los 10 alumnos entrevistados.
2. Se realizó un análisis cualitativo de las respuestas dadas por los 10 alumnos entrevistados.
3. Se determinó la cantidad de respuestas que presenta cada técnica de aprendizaje para cada ítem.
4. Se calculó el promedio de la cantidad de respuestas que presenta cada técnica.

IV. Para la utilización de las representaciones externas utilizadas por los alumnos entrevistados:

1. Se elaboró las redes semánticas de las intervenciones de los 10 alumnos entrevistados.

2. Se realizó un análisis cualitativo de las respuestas dadas por los 10 alumnos entrevistados.
3. Se determinó la cantidad de respuestas que presenta cada técnica de aprendizaje para cada ítem.
4. Se calculó el promedio de la cantidad de respuestas que presenta cada técnica.

5. Conocimientos previos en alumnos que ingresan a la Licenciatura en Educación, Mención Matemática y Física

El cuestionario permitió lograr los objetivos definidos; los resultados se presentan en cuatro secciones denominadas: dominio de contenido, tipos de representación, estrategias de solución y tipos de errores.

Dominio de contenidos

Se obtuvieron los siguientes resultados:

- a. Definición de fracción: del 52,77 % de los alumnos que contestaron, 21,18 % contestaron correctamente y 31,59 % incorrectamente.
- b. Relación porcentaje-fracción: del 61,8 % de los alumnos que contestaron, 32,98 % contestaron correctamente y 28,82 % incorrectamente.
- c. Operaciones entre fracciones: del 48,6 % de los alumnos que contestaron, 8,68 % contesta-

- ron correctamente y 39,92 % incorrectamente.
- d. Proporcionalidad directa y regla de tres: del 11,11 % de los alumnos que contestaron, todos respondieron incorrectamente.
 - e. Proporcionalidad: del 7,63 % de los alumnos que contestaron, todos respondieron incorrectamente.
 - f. Fracciones equivalentes: del 26,5 % de los alumnos que contestaron, 9,58 % contestaron correctamente y 16,92 % incorrectamente.
 - g. Decimales: del 29,16 % de los alumnos que contestaron, todos respondieron incorrectamente.
 - h. Resolución de problemas: del 13,18 % de los alumnos que contestaron, 4,16 % contestaron correctamente y 9,02 % incorrectamente.
 - i. Historia y epistemología: solo contestaron el 12,5 % de los alumnos.

Tipos de errores

En cuanto a los errores de contenido:

- a. El concepto de fracción es desconocido por el 47,23 % de los alumnos y cometen errores semánticos el 31,5 % de los alumnos de la muestra, lo cual representa el 59,69 % de los alumnos que responden los items relacionados a este contenido.
- b. La relación entre porcentaje y fracción es desconocida por el 38,2 % de los alumnos y cometen errores semánticos el 25,34 % de los alumnos de la muestra, lo cual representa el 41 % de los alumnos que responden los items relacionados a este contenido.
- c. La historia y epistemología del concepto de fracción es desconocida por el 87,5 % de los alumnos de la muestra.
- d. La relación entre proporciones y fracciones es desconocida por el 91,87 % de los alumnos y cometen errores semánticos el 8,13 % de los alumnos de la muestra, lo cual representa el 100 % de los alumnos que responden los items relacionados a este contenido.
- e. La relación entre decimales y fracciones es desconocida por el 70,83 % de los alumnos y cometen errores semánticos el 29,17 % de los alumnos de la muestra, lo cual representa el 100 % de los alumnos que responden los items relacionados a este contenido.
- f. El concepto de fracciones equivalentes es desconocido por el 73,48 % de los alumnos y cometen errores semánticos el 16,94 % de los alumnos de la muestra, lo cual representa el 63,87 % de los alumnos que responden los items relacionados a este contenido.
- g. El concepto de inverso multiplicativo es desconocido por el 76,38 % de los alumnos y cometen errores semánticos el

23,61 % de los alumnos de la muestra, lo cual representa el 100 % de los alumnos que responden los ítems relacionados a este contenido.

En conclusión, los errores de contenido son cometidos por el 77,43 % (en promedio) de los alumnos.

En cuanto a los errores de cálculo: en referencia a las operaciones entre fracciones es desconocido por el 24,31 % de los alumnos y cometen errores semánticos el 58,33 % de los alumnos de la muestra, lo cual representa el 70 % de los alumnos que responden los ítems relacionados a este contenido.

En cuanto a los errores de razonamiento: en referencia a la resolución de problemas es desconocido por el 86,81 % de los alumnos y cometen errores semánticos el 9,02 % de los alumnos de la muestra, lo cual representa el 68,38 % de los alumnos que responden los ítems relacionados a este contenido.

A través de las entrevistas se obtuvo la siguiente información:

Las estrategias de solución: empleadas por el 49,17 % de los alumnos que respondieron los ítems, en los cuales se utilizaban algoritmos, no los justificaron y el 53,12 % de los alumnos que respondieron los ítems en donde se razona, son capaces de justificar su razonamiento correctamente.

Los tipos de representación: en aquellos ítems donde es posible

realizar representaciones simbólicas, 78,89 % de los alumnos que responden los ítems la utilizan; en aquellos ítems donde es posible realizar representaciones formales, 75,35 % de los alumnos que responden los ítems la utilizan; en aquellos ítems donde es posible realizar representaciones en el lenguaje informal, 65,55% de los alumnos que responden los ítems la utilizan; y, en aquellos ítems donde es posible realizar representaciones icónicas, 4,35 % de los alumnos que responden los ítems la utilizan.

En la aplicación del cuestionario se obtuvieron los siguientes resultados:

- Más de 42 individuos de la muestra no respondieron los ítems (del 9 en adelante) relacionados a los conceptos de fracción, fracciones equivalentes, proporcionalidad directa e inversa, porcentaje, inverso multiplicativo, historia de las fracciones, relaciones entre regla de tres, proporciones y fracciones y uso cotidiano de las fracciones.
- De la poca cantidad de respuestas dadas en los ítems, desde el 11 hasta el 23, relacionadas a los conceptos de fracciones equivalentes, porcentajes, proporciones, proporcionalidad directa e inversa, regla de tres e inverso multiplicativo, ninguna fue correcta.

En las entrevistas se obtuvieron los siguientes resultados.

- En los items donde los alumnos en su mayoría justificaban sus razonamientos, son aquellos referidos a las definiciones de fracciones y porcentajes.
 - En los items relacionados a la resolución de ejercicios con operaciones entre fracciones, todos los alumnos en promedio resuelven sin razonar, aplicando los algoritmos conocidos mecánicamente.
 - En los items relacionados a la resolución de problemas solo 3 alumnos razonan el procedimiento del problema 7a y ninguno responde el 7b.
 - En el item relacionado al cálculo de fracciones equivalentes, ninguno de los alumnos justifica el algoritmo utilizado para hallarlas.
 - En los items referidos a las relaciones entre los conceptos de proporcionalidad, regla de tres y fracciones equivalentes, ningún alumno respondió.
 - En el item relacionado al inverso multiplicativo ningún alumno, justificó el hecho que el exponente negativo invierte la fracción.
- de los mismos, lo que induce a pensar que la técnica de aprendizaje utilizada con mayor frecuencia por los estudiantes, es la memorización.
- Las representaciones externas utilizadas con poca frecuencia por los alumnos entrevistados fueron las representaciones icónicas y con mayor frecuencia, más del 65 % de la muestra, las representaciones informales, formales y simbólicas, lo cual se puede explicar por el hecho de que sus respuestas eran memorizadas ya que no sabían justificarlas en el momento de la entrevista.
 - No justificaron los métodos aplicados para sumar, restar (métodos que ellos denominan multiplicación en cruz, M.C.M. y método largo) y multiplicar las fracciones, así como los utilizados para hallar las fracciones equivalentes (llamado por los alumnos de amplificación, simplificación o reducción y multiplicación en cruz); la justificación que los alumnos expresan es que así los enseñaron en la escuela.
 - Presentaron dificultades en realizar representaciones externas por escrito y verbal en las definiciones de fracciones, fracciones equivalentes, proporcionalidad directa e inversa, porcentaje y las relaciones entre proporcionalidad, regla de tres y fracciones equivalentes. Además, la gran

6. Conclusiones

En los alumnos entrevistados se observó lo siguiente:

- Aquellos, que logran dominar algunos algoritmos, el aprendizaje de estos no es significativo, pues no conocen el significado

mayoría de los alumnos desconocen estos contenidos.

- Cuando se les pide que justifique el hecho de que para hallar la cantidad de elementos que representa una determinada fracción de un conjunto de n elementos se debe multiplicar la fracción por n , este manifiesta que así se lo enseñaron y que está seguro que es así. Esto hace pensar que el alumno no tiene dudas, con respecto a la validez, de los algoritmos que le son enseñados pero no conoce la justificación de los mismos.

En los alumnos encuestados se observó lo siguiente:

- Los errores de contenido son cometidos por el 77,43 % de los alumnos; los errores de cálculos son cometidos por el 70 % de los alumnos y los errores de razonamiento son cometidos por el 68,38 % de los alumnos. Esta situación dificulta la tarea de aprendizaje de los contenidos de nivel superior, pues además de tener desconocimientos de los contenidos referidos a las fracciones, los alumnos presentan dificultades en los automatismos; ambos obstáculos deberán ser solventados antes de aprender los contenidos de niveles superiores.
- Los errores, tanto de contenido como de cálculo, cometidos más frecuentemente por los alumnos en las operaciones entre fracciones son las siguientes:

- a. Resuelven primero la sustracción y luego la multiplicación.
 - b. Operan incorrectamente los números enteros.
 - c. Olvido de signos de los números.
 - d. Suma de fracciones de manera lineal.
 - e. Utilización de una notación distinta a la operación que aplican.
 - f. Errada utilización de las igualdades.
 - g. Aplicación de la propiedad conmutativa de la división y la sustracción.
- La definición de fracción que prevalece es la de parte todo.
 - Aunque los contenidos que se aplican en los problemas que se plantearon en el cuestionario son tratados en el segundo nivel de Educación Básica, los alumnos que ingresaron a la universidad no fueron capaces de resolverlos.
 - El significado que le dan los alumnos a un exponente negativo es algorítmico, es decir, se quedan en un plano representacional y no conceptual (como el inverso multiplicativo).
 - Aunque algunos alumnos lograron relacionar el contenido de las fracciones con aplicaciones de la vida cotidiana, fue muy reducida la cantidad de estudiantes que lo hicieron.
 - Existe un desconocimiento total en cuanto a las definiciones de proporcionalidad directa e inversa y las relaciones entre:

- proporcionalidad, regla de tres y fracciones equivalentes.
- Mas de 40 alumnos lograron establecer relaciones entre las fracciones propias y los porcentajes, pero solamente 9 lograron establecer relaciones entre las fracciones impropias y los porcentajes. A los alumnos se les dificulta trabajar con las fracciones impropias.
 - Los alumnos desconocen en su totalidad la forma de expresar un número decimal como suma de potencias de diez.
 - Los alumnos desconocen en su totalidad el tiempo en que aparecieron las fracciones y por qué surgen las mismas.
 - Profundizar en el estudio de la teoría de errores, pues esta proporciona pautas para la planificación e implementación de las situaciones de aula.

Referencias bibliográficas

- JIMÉNEZ, D. (1999), *La aventura de la matemática*, Caracas, Los libros del Nacional.
- KILPATRICK, J. (1995), *Educación matemática*, México, Editorial Iberoamericana.
- MARTINÓN, A Y COLS (1999), *Ante el año mundial de las matemáticas 2000*, España, Revista Suma (31), 5-13.
- MAZA, C. (1995), *Aritmética y representación: De la comprensión del texto al uso de materiales*, México, Editorial Paidós.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN (1983), *Programas de la primera, segunda y tercera etapa de Educación Básica y del primer y segundo año del ciclo diversificado y profesional*. Venezuela.
- POZO, J. Y MARTI, E. (2000), *Más allá de las representaciones mentales: la adquisición de los sistemas externos de representación*. España, Revista: Infancia y Aprendizaje (90); 11-30.
- QUEVEDO, B. (1999); *El funcionamiento del error en el aprendizaje de las matemáticas* (mimeografiado); Doctorado de Ciencias Humanas. Postgrado de Humanidades y Educación. La Universidad del Zulia, Zulia.
- SISTEMA NACIONAL DE EVALUACIÓN DE APRENDIZAJE (S.I.N.E.A) (1998); *Informe diagnóstico en el área de matemática en tercer y sexto grado*.

7. Recomendaciones

Después de finalizada la investigación se hacen las siguientes recomendaciones para ser implementadas por los docentes de nuestro sistema educativo:

- Realizar este tipo de estudio con todos los alumnos que ingresan: a los programas de la Licenciatura en Educación (Matemática y/o Básica Integral) y a todos los grados y años del sistema educativo venezolano.
- Reforzar el uso de representaciones icónicas para comprender los conceptos matemáticos.
- Indagar sobre las diversas técnicas de aprendizaje utilizadas por los alumnos.