opción

Revista de Antropología, Ciencias de la Comunicación y de la Información, Filosofía, Lingüística y Semiótica, Problemas del Desarrollo, la Ciencia y la Tecnología

Año 35, diciembre 2019 N° 90

Revista de Ciencias Humanas y Sociales
ISSN 1012-1587/ ISSNe: 2477-9385
Depósito Legal pp 198402ZU45

Universidad del Zulia
Facultad Experimental de Ciencias
Departamento de Ciencias Humanas
Maracaibo - Venezuela

Opción, Año 35, Regular No.90 (2019): 542-580
ISSN 1012-1587/ISSNe: 2477-9385

Demostración del volumen de la esfera, una muestra genético-histórica

Ismael Cabero Fayos
Universidad Internacional de La Rioja, España.
ismael.cabero@unir.net

Resumen

Forma parte del imaginario colectivo que las matemáticas son una gran estructura, sólida, imperturbable e impoluta, y de hecho, es así como se suele mostrar a los estudiantes. En realidad, la travesía que han seguido estos conceptos hasta llegar a su estado actual ha sido larga, tortuosa y con múltiples vaivenes. El método genético aboga por servirse del camino histórico que han utilizado, en este caso las matemáticas, justamente por ser el más natural e intuitivo a la hora de presentar y comprender los entes matemáticos. En concreto queremos presentar diferentes técnicas que se han utilizado a lo largo de los siglos para calcular el volumen de una esfera, facilitando así su comprensión.

Palabras claves: Didáctica, matemáticas, método genético, volumen de la esfera, historia.

Volume of a sphere proof, a genetic-historical sample

Abstract

It is part of the social imaginary that mathematics is a great structure, solid, imperturbable and immaculate, and as a matter of fact, this is how it is usually shown to the students. Actually, the journey that these concepts have followed until they have reached their current state has been long, tortuous and with multiple sways. The genetic method advocates to use the historical path that mathematics has used, precisely because it is the most natural and intuitive in order to present the mathematical entities. Specifically, we want to display different techniques that have been used over the centuries to calculate the volume of a sphere, thus facilitating their understanding.

Recibido: 25-08-2019 •Aceptado: 01-10-2019

Keywords: Didactics, mathematics, genetic method, volume of the sphere, history.

1. INTRODUCCIÓN

Las matemáticas son presentadas, en la inmensa mayoría de los libros de texto, como una estructura perfecta que hace pensar que los matemáticos han creado sus teorías e ideas de súbito, sin ninguna fisura, con una cadencia impecable. Esta perfección confiere a las matemáticas un halo místico que, a menudo, se percibe difícil de alcanzar por los mortales. En cierta manera, ya sea este el motivo o se deba a su funcionalidad y concisión, la asignatura de matemáticas es valedora de un prestigio que facilita al profesorado su labor (Mato-Vázquez et al., 2017), pero las barreras que han tardado siglos en superar los matemáticos, resurgen en los neófitos que se aventuran en el vasto campo matemático, y esa pureza en la presentación, lejos de la realidad, puede producir un grado de aversión personal hacia las matemáticas, que en ocasiones torpedea sus creencias, actitudes y emociones hacia ellas (Rodríguez et al., 2018).

Es evidente que los docentes tenemos una gran responsabilidad a la hora de mitigar la llamada “ansiedad matemática” que ya definían Richardson and Suinn (1972), y por la cual además de mejorar diferentes estrategias docentes, se ha de añadir la dimensión afectiva a la ecuación pedagógica (Piquer et al., 2018). Una posible forma de actuar para mitigar las dificultades podría ser ofrecer a nuestro alumnado la experiencia y las vías históricas que se han utilizado para superar los diferentes obstáculos (Lozano, 2018; Pallarès-Piquer, 2018), mostrando una matemática que pueda ser percibida más real y falible.

En este artículo nuestro objetivo no es tanto el ofrecer una respuesta completa y propicia a la falta de motivación del alumnado (respecto a las matemáticas) como sí contribuir con argumentos y con muestras concretas que permitan al profesorado considerar aquello que la historia realmente puede aportar al plan de estudios así como a su quehacer diario (Gutiérrez-Barba and de la Luz Valderrábano-Almegua, 2017; Piña et al., 2017). Deseamos ejemplificar una de estas estrategias que, aunque no es del todo novedosa, a nuestro parecer presenta ventajas que favorecen la presentación, pauta y asimilación de conceptos (Frías, 2017), así como una humanización de las matemáticas en la que se suaviza el pedestal de perfección y dificultad que suele envolver a las mismas, y que frecuentemente las muestra inalcanzables (Velilla-Jiménez, 2018). Nos referimos al método genético, el cual sustenta que utilizar en la docencia el camino histórico que han necesitado recorrer los conocimientos (hasta llegar a su estado actual) lo que en realidad permite es naturalizar y favorecer su adquisición.

A la estela de todo lo apuntado hasta ahora, en este trabajo vamos a argumentar que el uso de la historia de las matemáticas como constructo pedagógico desarrolla en los educandos conocimientos y actitudes (volitivas, operativas, proyectivas e incluso actitudes generadoras simbolizantes) y condiciona las capacidades específicas de aplicación de algunas dimensiones generales matemáticas.

Como se ha apuntado anteriormente, no es una idea original o primigenia, ya indicaba Poincaré (1914), citado en Lakatos (2015, pág.4), que "los zoólogos mantienen que el desarrollo embrionario de un animal resume en un tiempo muy corto toda la historia de sus antepasados desde los tiempos geológicos. Parece que sucede lo mismo en el desarrollo de las mentes... Ese es el motivo por el cual la historia de la ciencia debe ser nuestra primera guía".

Pero aún nos podemos remontar a épocas más antiguas en las que ya se abogaba por la utilización de este método, según Schubring (1978) citado en Mosvold (2002), "El método genético lógico es una expresión de una filosofía racionalista. Para Arnauld (1612-1694), el método podría expresarse como el arte de secuenciar una serie de pensamientos en el orden lógico correcto, donde el objetivo es descubrir o establecer la verdad. Con su método genético histórico, Clairaut (1713-1765) es el primero en aplicar la historia de las matemáticas como base para el proceso de aprendizaje".

Es positivo resaltar que esta teoría ha sido reconocida y desarrollada por grandes pensadores, cosa que continúa sucediendo. En González (2004) tenemos una muestra de alusiones de sabios, tales como F. Klein, D. Hilbert, L. Santaló, R.Courant, Carl B.Boyer, E. Droeven, I. Lakatos,. . . mostrando la importancia y validez del método genético.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Tal como apuntan Fauvel and Van Maanen (2006), hay un listado de 17 motivos (divididos en cinco áreas principales) por los que la docencia de las matemáticas se ve reforzada, enriquecida y favorecida si se integra la historia en ella;

a. El aprendizaje de las matemáticas;

1. Desarrollo histórico vs. matemáticas pulidas.

2. La historia como recurso.

3. La historia como puente entre las matemáticas y otras asignaturas.

4. El valor educativo más general de la historia.

b. El desarrollo de visiones sobre la naturaleza de las matemáticas y la actividad matemática;

1. Contenido.

2. Forma.

c. El trasfondo didáctico de los profesores y su repertorio pedagógico;

1. Identificar las motivaciones detrás de la introducción del (nuevo) conocimiento matemático, a través del estudio de ejemplos que sirvieron como prototipos en su desarrollo histórico y que pueden ayudar a los estudiantes a entenderlo.

2. Tomar conciencia de:

i. Las dificultades, o incluso los obstáculos, que aparecieron en la historia y pueden reaparecer en clase.

ii. Cómo de “avanzado” puede ser un sujeto.

3. Involucrarse, por lo tanto tomar más conciencia del proceso creativo de "hacer matemáticas".

4. Enriquece su repertorio didáctico de explicaciones, ejemplos y enfoques alternativos para presentar un tema o resolver problemas (ver (a2) más arriba).

5. Participar en una situación en la que tienen que descifrar y entender una pieza conocida de las matemáticas correctas pero cuyo tratamiento no es moderno.

d. La predisposición afectiva hacia las matemáticas;

1. Que las matemáticas son un sujeto evolutivo y humano, más que un sistema de verdades rígidas.

2. El valor de persistir con ideas, de intentar emprender líneas de indagación, de plantear preguntas y de intentar desarrollar formas de pensamiento creativas o idiosincrásicas (véase (b1) más arriba).

3. No desanimarse por fallos, errores, incertidumbres o malentendidos, apreciando que estos han sido los componentes básicos del trabajo de los matemáticos más destacados.

e. La apreciación de las matemáticas como un esfuerzo cultural-humano;

1. A través del estudio detallado de ejemplos históricos, a los estudiantes se les puede dar la oportunidad de apreciar que las matemáticas son impulsadas no solo por razones utilitarias (una visión que prevalece actualmente), sino también desarrolladas por su propio interés.

2. La historia puede proporcionar ejemplos de cómo el desarrollo interno de las matemáticas, ya sea por razones utilitarias o "puras", ha sido influenciado, o incluso determinado en gran medida, por factores sociales y culturales.

3. Las matemáticas, en su forma moderna, se ven principalmente como un producto de una cultura particular (occidental). A través del estudio de la historia de las matemáticas, los maestros y los estudiantes tienen la

oportunidad de conocer otros enfoques menos conocidos de las matemáticas que aparecieron en otras culturas y el papel que desempeñaron en ellas.

Pero también hay objeciones, en un listado del mismo capítulo del International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) Study (Fauvel and Van Maanen 2006), nos muestran las distintas consideraciones que se han argumentado en contra de la utilización del método genético en la docencia de las matemáticas. Están basados en dos fuentes de dificultad, la filosófica y la práctica. Consideramos que las ventajas anteriormente expuestas son suficiente razón para desmontar estas objeciones y, de forma similar a la que reflejan Fauvel and Van Maanen (2006), escribimos al final de cada objeción la ventaja o ventajas que las anulan:

(O1) La historia no es matemática. Si debe enseñar historia, primero se deben enseñar matemáticas en sí mismas: primero enseñe la materia y luego su historia. (a1, a2, c4)

(O2) La historia puede ser tortuosa y confusa en lugar de esclarecedora. (a1, b2, c5, d3)

(O3) Si los estudiantes no tienen una educación más amplia en la historia general, pueden tener un sentido errado del pasado que hace imposible la contextualización histórica de las matemáticas.

(O4) A muchos estudiantes no les gusta la historia y, por implicación, les disgustará la historia de las matemáticas. (a2, b1)

(O5) El progreso en las matemáticas es hacer que el abordaje de problemas difíciles sea una rutina, entonces, ¿por qué molestarse en mirar atrás? (a1, b1, c1, c2, d3, e1)

(O6) La historia puede ser propensa a generar chovinismo cultural y nacionalismo parroquial. (e3)

(O7) Falta de tiempo: no hay suficiente tiempo en el aula para el aprendizaje de las matemáticas tal como está, y aún menos cuando se propone enseñar la historia de las matemáticas también. (a2)

(O8) Falta de recursos: no hay suficientes materiales de recursos apropiados para ayudar incluso a aquellos maestros que quieran integrar información histórica.

(O9) Falta de experiencia: la falta de experiencia histórica del profesor es una consecuencia de la falta de programas adecuados de formación docente; de hecho, no solo se requiere conocimiento histórico, sino también interdisciplinario, que va mucho más allá de lo que los maestros de matemáticas están equipados. La falta de experiencia conduce a una falta de confianza aún más debilitante. (a3, e2)

(O10) Falta de evaluación: no hay una manera clara o consistente de integrar ningún componente histórico en la evaluación de los estudiantes, y si no se evalúa, los estudiantes no lo valorarán ni le prestarán atención. (a2, a4)

Las seis primeras objeciones son filosóficas, las últimas cuatro son prácticas. Podríamos añadir una ventaja o virtud a las ya expuestas que, a nuestro parecer, contrarresta la objeción O8. Es posible que no haya un repositorio completo donde apoyarse a la hora de trabajar el método genético, pero la ebullición de internet y el surgimiento de trabajos académicos como el presente son un buen ejemplo de que el número de recursos aumenta, aunque quede mucho trabajo por hacer.

Por consiguiente, aceptando un mayor peso de las ventajas sobre cada uno de los inconvenientes vamos a ejemplificar uno de los inagotables caminos con los que mostrar la validez del método genético. Hay tantas formas de aplicar el conocimiento histórico de un concepto matemático como nos faculte nuestro conocimiento y nuestra imaginación. En este artículo, concretamente vamos a presentar diferentes enfoques que se han dado a lo largo de la historia para calcular el volumen de la esfera. Aunque vayamos a exponer una muestra significativa de las distintas soluciones que se han dado históricamente para resolver dicho problema, no es una investigación que pretenda mostrar todas las perspectivas conocidas a dicho problema, puesto que su objetivo es evidenciar las ventajas de este método, anteriormente enumeradas.

3. METODOLOGÍA-MUESTRA

Es incuestionable la importancia de la esfera en la historia del ser humano y en todas sus facetas. Por ejemplo en el S. V a.C. el griego Jenófanes de Colofón propuso un solo dios, cuya forma era una esfera (Lesher, 2001), al mismo tiempo Pitágoras planteaba que la Tierra era una esfera,... El hecho de que la esfera sea un cuerpo donde todos sus puntos son equidistantes al centro o que sea la figura que minimiza la superficie para un mismo volumen, le infiere muchas ventajas que han dado una gran relevancia el estudio de la misma.

Para exponer las distintas demostraciones que se han utilizado a la hora de calcular el volumen de la esfera, se pueden utilizar distintos criterios; si tuviéramos que presentarlo al alumnado estaríamos muy pendientes de revisar la complejidad de los razonamientos para que estén a su alcance, y sería lógica una presentación gradual según su dificultad. En nuestro caso, vamos a presentar las distintas demostraciones por orden cronológico. Las matemáticas griegas (o escritas en griego) se empaparon de diferentes culturas (como la egipcia y la mesopotámica), pero los griegos consiguieron darle un enfoque totalmente distinto al convertirlas en una ciencia deductiva y rigurosa, erigida sobre axiomas y postulados evidentes (Bernal, 1992).

Fueron los primeros en dar demostraciones de números irracionales, se desarrolló el método exhaustivo de Eudoxo para calcular áreas, y la Criba de Eratóstenes para descubrir los números primos. Importaron los métodos ad hoc de construcción del círculo o de la Elipse y se desarrolló una amplia teoría de cónicas. Recopilaron una vasta colección de fórmulas para calcular áreas y volúmenes, demostrando su validez. La primera demostración abstracta conocida es griega, y todos los estudios posteriores de lógica derivan de los métodos establecidos por Aristóteles. Euclides escribió los Elementos, libro usado para aprender matemáticas en toda Europa, Oriente Próximo y norte de África durante 2000 años.

Hay quien considera Arquímedes (287-212 a. C.) de Siracusa el mayor matemático de este período, que murió, según Plutarco, atravesado por una lanza de un soldado romano (Boyer and Merzbach, 2011). Comenzaba el dominio de la Civilización Romana en el Mediterráneo, que hizo muy pocas aportaciones a las matemáticas.

Podemos empezar con la propuesta del mismo Arquímedes para el cálculo del volumen de la esfera, encontrado en el Palimpsesto de Arquímedes, descubierto en 1906, y la cual se basaba en comparar, utilizando la Ley de la palanca, una esfera de radio r con un cilindro y un cono con la base de radio 2r. Al propio Arquímedes se le atribuye la primera postulación matemática formal del principio de la palanca y la famosa frase “Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo” (Hultsch et al., 1878).

Tal como indica Lurje (1948, pág.176), citado en Knill and Slavkovsky (2013): “Arquímedes es un autor muy difícil. Aparece como tal para nosotros y debería haberlo sido para los antiguos matemáticos. Si Plutarco elogia la comprensibilidad de las pruebas de

Arquímedes, entonces demuestra que Plutarco no entendió las matemáticas, que nunca leyó Arquímedes y solo quiso pintar la imagen de un genio." no es sencillo leer a Arquímedes y su demostración tal vez no es la más asequible.

La demostración que presentamos la hemos obtenido de Sanchis (2016).

El método que utiliza Arquímedes para encontrar el volumen de un sólido es compararlo con otros sólidos, el volumen de los cuales es conocido, encontrar el punto de equilibrio y utilizar el Principio de la palanca para descubrir el volumen inicial.

Supongamos que dos masas (Figura 1), *W* y *w*, se colocan sobre un eje horizontal sin masa que descansa sobre un soporte, llamado fulcro. Si *W* está a una distancia *D* del punto de apoyo y *w* está a una distancia *d* del punto de apoyo, entonces el sistema se equilibrará si y solo si *W D* = *wd*.

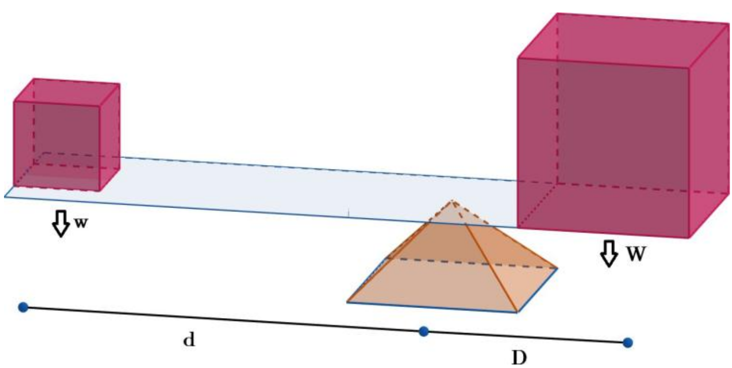

Figura 1. Diagrama del Principio de la palanca

Si una esfera con radio *r* se coloca dentro de un cilindro cuya altura y radio son iguales al diámetro de la esfera (Figura 2). Suponga también que un cono con el mismo radio y altura también cabe dentro del cilindro, como se muestra a continuación.

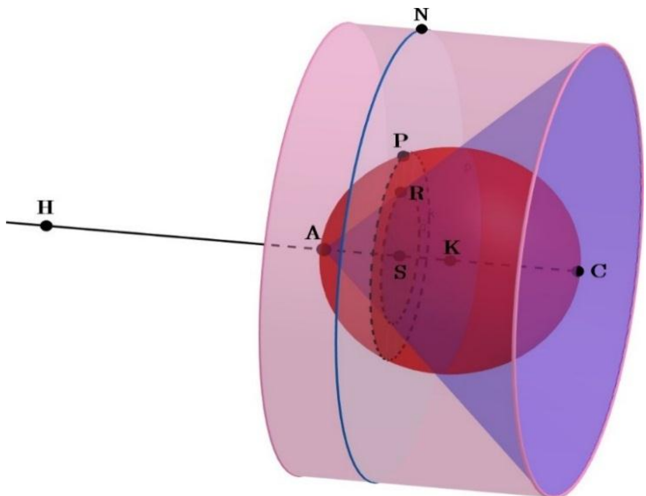

Figura 2. Posición inicial de la esfera, del cono y del cilindro

Elegimos un corte arbitrario a través de estos tres sólidos, perpendicular a su eje común. Esa rebanada corta tres círculos, como se muestra en la figura 2. Arquímedes demuestra por geometría elemental que, si los dos círculos más pequeños se deslizan a lo largo del eje hasta un punto a dos veces la altura del cilindro, y el círculo grande se queda dónde está, sus áreas (consideradas como masas) se equilibrarán exactamente sobre un punto de apoyo. (punto de equilibrio) en el centro de la figura (Figura 3).

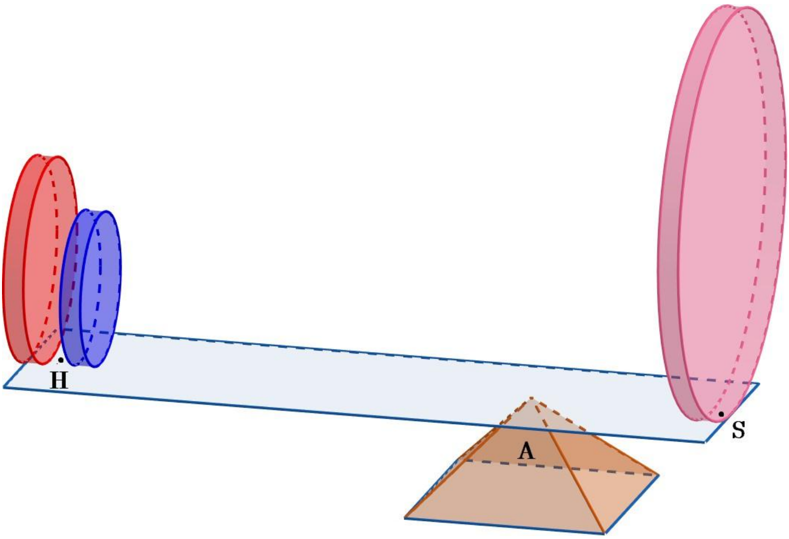

Figura 3. Punto de equilibrio de las tres secciones.

Para cualquier punto S en el diámetro AC de la esfera, supongamos que miramos una sección transversal de los tres sólidos obtenidos al cortarlos con un plano que contiene el punto S, paralelo a la base del cilindro. Las secciones transversales son todos círculos con radios SR, SP y SN, respectivamente. Lo que Arquímedes descubrió fue que si las secciones transversales del cono y la esfera se mueven a H (donde $|HA| = |AC|$), entonces equilibrarán exactamente la sección transversal del cilindro, donde HC es la línea de equilibrio y el fulcro se coloca en A.

Esto no es difícil de mostrar. Si el radio de la esfera es r, el origen está en A, y la coordenada x de S es x, entonces la sección transversal de la esfera tiene área (utilizando el teorema de Pitágoras):

$$\pi\,(r^2 - (x - r)^2) = \pi\,(2rx - x^2)$$

la sección transversal del cono tiene área πx^2, y la sección transversal del cilindro tiene área $4\pi r^2$. Entonces, de acuerdo con la ley de la palanca, para que se mantenga la relación de equilibrio anterior, necesitamos que la siguiente ecuación sea verdadera:

$$2r[\pi x^2 + \pi(2rx - x^2)] = 4\pi r^2 x$$
$$2r[\pi x^2 + 2\pi rx - \pi x^2] = 4\pi r^2 x$$
$$2r[2\pi rx] = 4\pi r^2 x$$
$$4\pi r^2 x = 4\pi r^2 x$$

Y así es.

□

Según Plutarco (Thomas, 1957), Arquímedes estaba tan orgulloso de su hallazgo que pidió el reflejo del mismo en su lápida. Tal como indica Simms (1990), Cicerón confirmó que “una esfera junto con un cilindro se había colocado encima de su tumba” aunque nunca se ha encontrado dicha lápida.

El trabajo de Arquímedes está ahora disponible en Heath et al. (2002) y en forma comentada en Heath (2007) y Netz (2010).

Con la intención de mostrar la riqueza de la diversidad cultural y siguiendo nuestro orden cronológico, podríamos trabajar la demostración de otros dos grandes matemáticos de origen chino, Zu Chongzhi 429–500 d. C. y su hijo Zu Geng, 480-525 d. C.

No quedan demasiadas referencias o evidencias de las matemáticas de la Antigua China debido a dos factores clave. Uno fue que en el año 213 a.C., el emperador de China Qin Shihuang ordenó quemar todos los libros, aunque esta orden no se llegó a cumplir totalmente (Smith, 1958). El otro problema añadido es que un apoyo habitual de la escritura de los chinos era el bambú, un material muy perecedero. Sí sabemos que utilizaban un sistema de numeración decimal muy avanzado para su tiempo, que les facilitaba los cálculos.

Durante los mil años posteriores a la quema, las matemáticas chinas prosperaron a la vez que en Europa eran casi inexistentes. Una lista de descubrimientos matemáticos hechos primero en China, y que no se conocieron en Occidente hasta mucho más tarde, son los números negativos, el teorema del binomio, matrices, métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, el teorema chino del residuo, el triángulo de Tartaglia, la regla de tres…

Tsu Ch'ung-Chih, calculó el valor de π hasta seis decimales correctos ($\frac{355}{113}$), fue la mejor aproximación durante casi mil años (Castellanos, 1988).

Respecto al volumen de la esfera, Zu Chongzhi empezó a trabajar en el problema, pero quien consiguió la resolución del volumen del mou he fang gai y, por ende, de la esfera, fue Zu Geng. En él se ha de aplicar lo que en occidente se conoce como el teorema de Pitágoras y utilizar dos sólidos el mou he fang gai y el yangma.

Basándonos en Kiang (1972), la demostración consiste:

Un mou he fang gai es el espacio común a dos cilindros idénticos que se cruzan perpendicularmente (Figura 4 y 5).

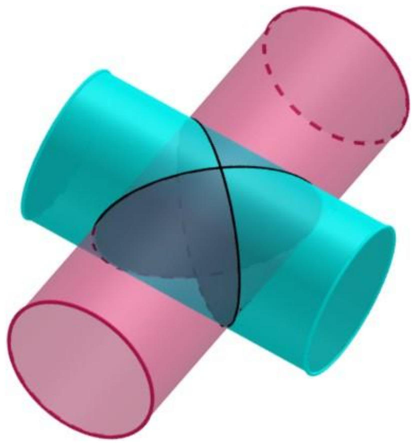

Figura 4. Intersección de dos cilindros perpendiculares

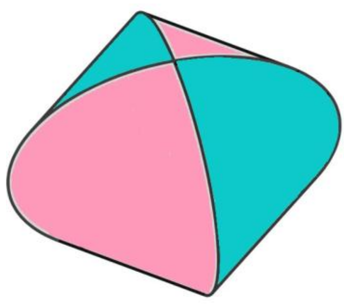

Figura 5. Mou he fang gai producido por la intersección de dos cilindros perpendiculares

Pero también lo podemos formar si a cada sección de la esfera la sustituimos por su cuadrado circunscrito (Figura 6).

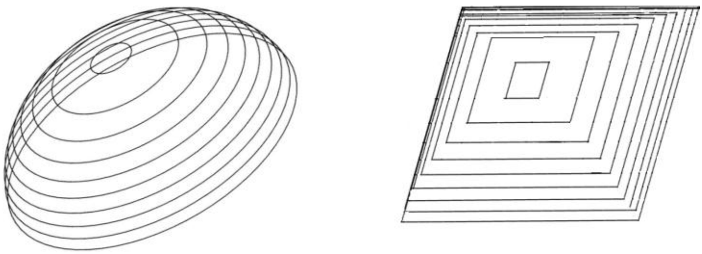

Figura 6. Mou he fang gai generado por los cuadrados circunscritos en cada sección

Y como la razón entre el área de cada círculo y su cuadrado circunscrito es $\frac{\pi}{4}$, también lo será entre el volumen de la esfera (V_e) y el del mou he fang gai circunscrito.

$$\textit{Volumen esfera } (V_e) \textit{ / volumen mou he fang gai} = \frac{\pi}{4}$$

Si dividimos el mou he fang gai en ocho octantes idénticos, cada uno de ellos tendrá una base cuadrada, dos caras rectas y dos curvas. Si el radio de la esfera original es *r*, entonces los lados de la base cuadrada también miden *r* y las caras rectas son cuadrantes de un círculo de radio *r*. Si comparamos un octante del mou he fang gai con un cubo de radio *r*, y estudiamos la diferencia de volumen entre ambos.

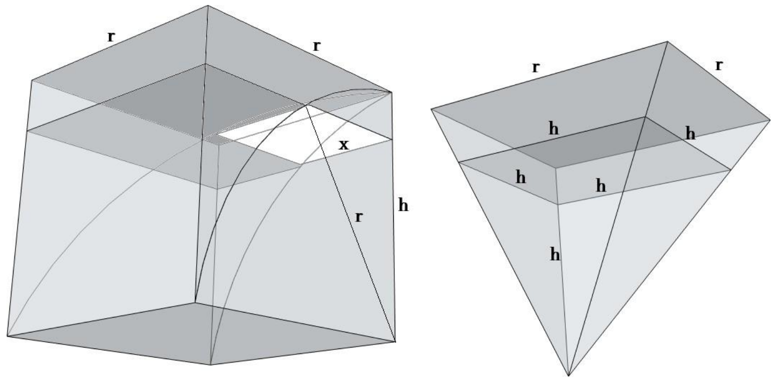

Figura 7. Comparativa del mou he fang gai y el yangma

Según la figura 7, una sección a una altura *h* del octante dentro del cubo nos da una diferencia de área, $r^2 - x^2$, pero si nos fijamos en la definición de *h*, por Pitágoras tenemos que $h^2 = r^2 - x^2$ y por lo tanto coincide el área cada una de las secciones con h^2, eso significa que la diferencia entre el cubo y el octante es la pirámide de base cuadrada de lado *r* y altura también *r*, también conocido como yangma, por lo tanto Zu Geng llegó a la conclusión:

$$\textit{Volumen de un cubo} - \frac{1}{8}\,\textit{mou he fang gai} = \textit{yangma}$$

Aplicando la razón entre el volumen de la esfera y el del mou he fang gai obtenemos:

$$r^3 - \frac{4V_e}{8\pi} = \textit{yangma}$$

y como ya se sabía que un cubo se podía dividir en tres yangma (Figura 8),

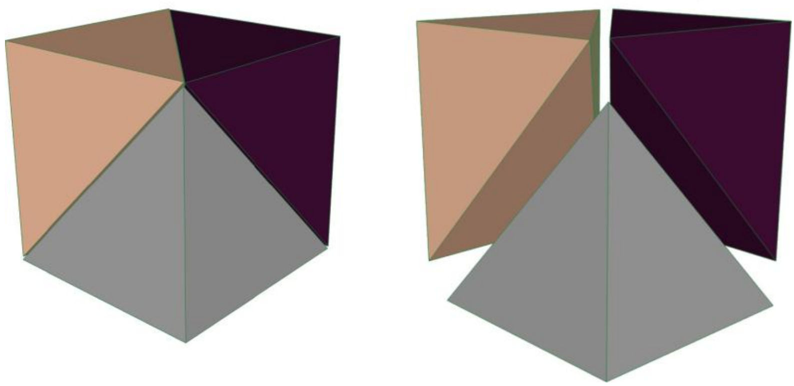

Figura 8. Descomposición del cubo en tres yangmas.

$$yangma = \frac{1}{3}r^3$$

Si sustituimos esta fórmula en la anterior, obtenemos

$$r^3 - \frac{4 \cdot V_e}{8\pi} = \frac{1}{3}r^3$$

$$\frac{2}{3}r^3 = \frac{4 \cdot V_e}{8\pi}$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = V_e$$

Si damos un salto de seis siglos y cambiamos de civilización, podemos viajar a la Europa medieval, en la que encontraremos una demostración muy intuitiva del catalán Abraham Bar Hiyya (o Abraham Iudaeus Savasorda), (1070-1136). En aquella época la gente erudita tenía nociones elementales de matemáticas (operaciones básicas y geometría) y continuaba utilizando una notación arcaica e incómoda: usaban números romanos y palabras para representar las operaciones en lugar de signos.

Gracias a las traducciones al latín de los textos árabes, el conocimiento de la numeración indo-arábiga y otros desarrollos importantes de las matemáticas en la India y en el Islam, llegaron a Europa. El siglo XII, Robert de Chester tradujo al latín la obra de Al-Khwarizmi *Hisab al-jabr w'al-muqabala*. También se tradujeron, en diferentes versiones, los textos completos de los Elementos de Euclides. Estas y otras fuentes espolearon una renovación y un despertar en el interés de las matemáticas.

Fibonacci, los principios del siglo XIII, produjo las primeras matemáticas de peso en Europa desde los tiempos de Eratóstenes, los separaban más de mil años.

Savasorda, para calcular el volumen de una semiesfera de radio r, se imaginó la base como un conjunto de circunferencias concéntricas (como media cebolla), tal como muestra la figura 9,

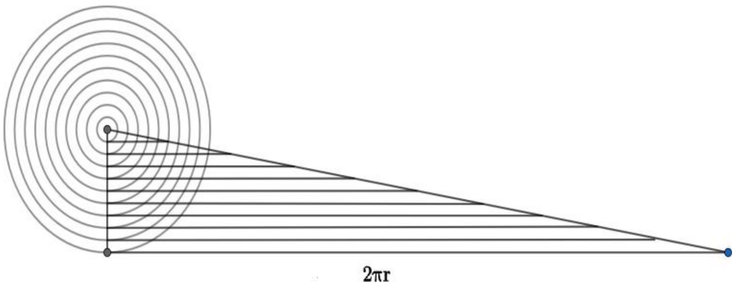

Figura 9. Extensión de las circunferencias concéntricas

si extendemos cada una de estas circunferencias nos queda un triángulo rectángulo, la base del cual será la longitud de la circunferencia mayor $2\pi r$ y su altura r, el radio de la base de la semiesfera, por lo tanto aplicando la fórmula del área del triángulo calcularemos el área de la base de la semiesfera, $\frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi \cdot r^2$

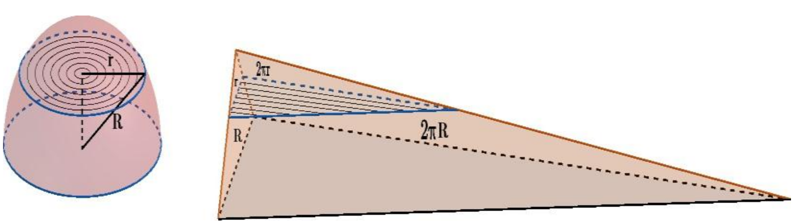

Figura 10. Comparativa entre la semiesfera de radio R y la pirámide correspondiente

De ese modo cada sección de la semiesfera coincidirá con el área de un triángulo rectángulo (figura 10) y el conjunto de todas las secciones de la semiesfera coincide con la unión de todos los triángulos rectángulos que formarán una pirámide, ambos cuerpos tendrán el mismo volumen.

$$\textit{volumen de la pirámide}=\frac{2\pi\cdot R^2\cdot R}{3}=\frac{2\pi R^3}{3}=\textit{volumen de la semiesfera}$$

por lo tanto, el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi R^3$

Podríamos continuar con un razonamiento similar al propuesto en la demostración de Arquímedes, por eso introduciremos al matemático Bonaventura Cavalieri (1598-1647) y su famoso Principio que aparece en el libro con título *Geometría indivisibilius continuorum quadam ratione promota* (1635). Hay que recordar que Zu Chongzhi y su hijo ya utilizaron la base teórica del Principio de Cavalieri un milenio antes (He, 2004), así como el propio Arquímedes (casi con dos milenios de antelación) aunque le profería un valor más intuitivo que formal (Simmons, 2007, pág.109).

En el siglo XVII, Europa entera vivió un estallido sin precedentes en las ideas científicas y matemáticas. Sirvan como ejemplo los siguientes avances; Copérnico, escribió que los planetas giraban alrededor del Sol; Tycho Brahe, reunió una gran cantidad de datos matemáticos que describían las posiciones de los planetas en la esfera celeste; Johannes Kepler consiguió encontrar las fórmulas matemáticas que regían los movimientos de los planetas; John Napier fue el primero en investigar los logaritmos neperianos; la geometría analítica desarrollada por Descartes permitió dibujar estas órbitas en gráficas; Isaac Newton descubrió las leyes de la física que explicaban las órbitas de los planetas y también los cálculos matemáticos, de los que se podían deducir las leyes de Kepler y de la gravitación universal; y Gottfried Leibniz inició el estudio del cálculo infinitesimal, además de otros trabajos en lógica y topología. Según Granger (1994), Cavalieri junto con Newton, Leibniz, Pascal, Wallis y MacLaurin fue uno de los matemáticos que en los siglos XVII y XVIII redefinieron el objeto matemático". La ciencia y la matemática se habían convertido en un esfuerzo internacional que se extendería por todo el mundo. El principio de Cavalieri indica que: "Si dos sólidos, al ser cortados por planos paralelos, producen siempre secciones de igual superficie entonces estos cuerpos tienen el mismo volumen".

La utilización de este Principio nos permite demostrar el volumen de una esfera de radio *r* (Simmons, 2007), comparándolo con el volumen del cilindro y dos conos (con forma de diábolo) correspondientes, con base un círculo de radio *r* y altura 2*r* (figura 11).

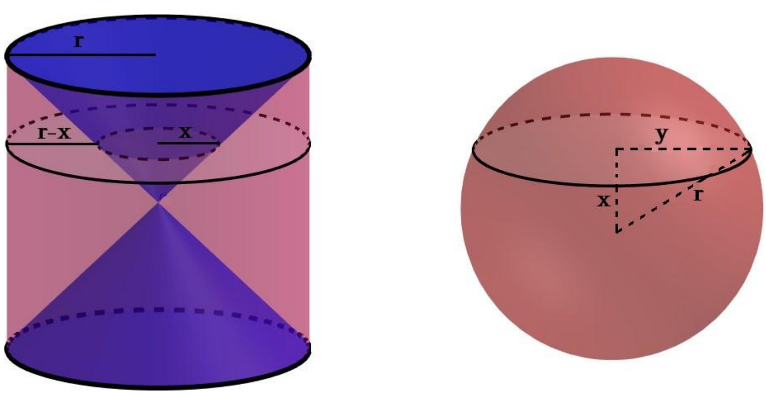

Figura 11. Comparativa entra la esfera, el cilindro y el diábolo, obtenido en Simmons (2007)

Podemos recoger la idea y simplificar los cálculos y su visualización con una semiesfera de radio *r*, con un cono y un cilindro recto de altura y radio de la base el mismo *r*, (figura 12). Según Galileo, un razonamiento equivalente utilizó también Luca Valerio (contemporáneo de Cavalieri) para encontrar el volumen de la esfera (Bishop et al., 1996; Fernández Rodríguez, 1990),

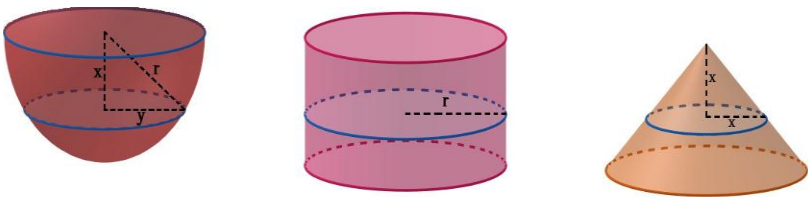

Figura 12. Comparativa simplificada utilizando una semiesfera y el cilindro y cono correspondiente

Si comparamos las figuras resultantes de hacer un corte con un plano paralelo a la base del cilindro o del cono, obtenemos tres círculos, el área del círculo obtenido en el corte de la semiesfera es equivalente a la resta del obtenido en el cilindro menos el del cono. Si en lugar de pensar en un plano, hacemos un corte con dos planos paralelos muy cercanos obtendremos rebanadas o secciones; el volumen de las mismas mantendrán la misma relación que las áreas de los círculos y ello permite obtener la relación entre los volúmenes de las figuras.

Escrito utilizando notación moderna:

Si en cada figura nos fijamos en el área que proporciona el corte con el plano paralelo a la base del cilindro obtenemos:

Área del círculo en la semiesfera = $\pi y^2 = \pi (r^2 - x^2)$

Área del círculo en el cilindro = πr^2

Área del círculo en el cono = πx^2

Es inmediato comprobar que

Área del círculo en la semiesfera = Área del círculo en el cilindro – Área del círculo en el cono

Si extendemos esta propiedad a las infinitas secciones paralelas a la base del cilindro y aplicando el Principio de Cavalieri obtenemos:

Volumen de la semiesfera = Volumen del cilindro – Volumen del cono

Y como el volumen del cilindro y del cono eran conocidos, podemos deducir la fórmula del volumen de la semiesfera:

$$\text{Volumen de la semiesfera} = \pi r^2 \cdot r - \frac{\pi r^2 \cdot r}{3} = \frac{2}{3}\pi r^3$$

Por consiguiente, el

$$\textit{Volumen de la esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Otro contemporáneo de Cavalieri fue Johannes Kepler (1571-1630), en su libro *Nova stereometria doliorum vinariorum* (1615) muestra un razonamiento por el que se relaciona el volumen de una esfera y el área de la misma, es decir, conociendo una de ellas podremos deducir la otra (Eduwards Jr, 1979).

Supongamos que la superficie de la esfera es conocida y está dividida en una gran cantidad de polígonos (por ejemplo triángulos) (Figura 13).

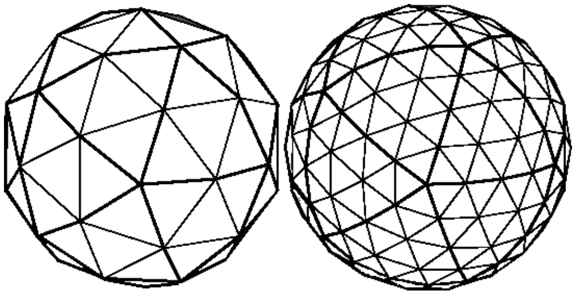

Figura 13. Evolución de la triangulación de la superficie de una esfera

Aunque las figuras mostradas no son una esfera, si utilizáramos un número infinito de polígonos la conseguiríamos, y, evidentemente, la suma de sus áreas (S_i) equivaldría a la superficie de la esfera (S_e).

$$\sum_i S_i = S_e = 4\pi r^2$$

Ahora imaginemos que esos polígonos (triángulos) son la base de pirámides que tienen su vértice superior en el centro de la esfera, por lo tanto, la altura de esas pirámides coincidirá con el radio de la esfera. Y la suma de los volúmenes de las pirámides (V_i) es idéntica al volumen de la esfera (V_e).

$$\sum_i V_i = V_e$$

Por lo tanto,

$$V_e = \sum_i V_i = \sum_i \frac{S_i \cdot r}{3} = \frac{r}{3} \cdot \sum_i S_i = \frac{r}{3} \cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Para demostrar el volumen de la esfera desde una vertiente más moderna podríamos utilizar el método de los discos o también integrales triples con coordenadas esféricas o coordenadas cartesianas... Tal vez estas demostraciones no forman parte de la esencia del artículo, que ha hecho un recorrido histórico más extenso y ha intentado tener una notación más simplificada, pero consideramos que puede ser positivo dar una pincelada del mismo y así también abrir el método a algún curso superior.

Vamos a servirnos del método de los discos para encontrar el volumen de una superficie de revolución, como es la esfera.

La ecuación del círculo con coordenadas cartesianas (centrado en el origen y de radio *r*) es

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Si despejamos la coordenada *y*, y nos quedamos con la parte positiva, obtenemos un semicírculo (superior) de extremos $-r \leq x \leq r$:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

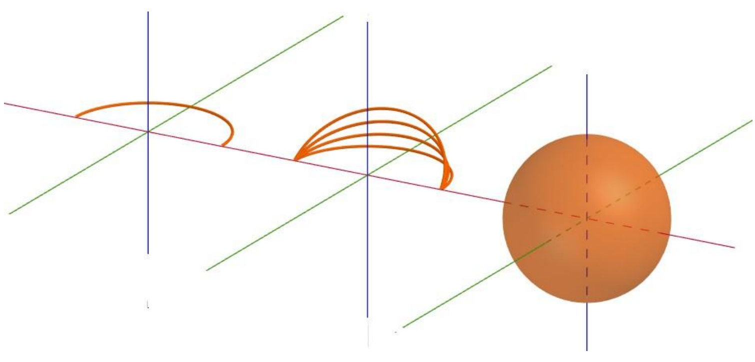

Figura 14. Revolución de la semicircunferencia de radio *r* y centro el origen

Por el método de los discos sabemos que el volumen del cuerpo de revolución generado por *y* rotando en el eje *x* es (figura 14):

$$V = \pi \int_{-r}^{r} y^2 \, dx$$

Por lo tanto:

$$V_e = \pi \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2}\,)^2 \, dx = \pi \int_{-r}^{r} r^2 - x^2 \, dx$$

$$= \pi r^2 x - \pi \frac{x^3}{3} \Big|_{x=-r}^{x=r} =$$

$$= \left(\pi r^3 - \pi \frac{r^3}{3}\right) - \left(\pi(-r^3) + \pi \frac{-r^3}{3}\right) = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

4. CONCLUSIÓN

En este artículo que ahora concluye hemos abordado retos de la disciplina matemática derivados del fomento de la historia de las matemáticas como campo que ayuda a minimizar la complejidad objetual de las matemáticas y sistematiza la vinculación entre objetivo pedagógico-asignatura-conocimiento-legado histórico. La propuesta que se ha desarrollado integra dimensiones de intervención que, en consonancia con la competencia concreta (y adecuada) de cada contenido matemático actual, plantean estrategias de actuación al servicio de la acción pedagógica. De esta manera, a causa de su doble condición (contenido-referente) la experiencia derivada de la historia de las matemáticas se convierte en ámbito de educación y permite secuenciar una serie de contenidos, razonamientos y saberes que afianzan la autonomía funcional y la complementariedad metodológica (de la acción del presente) como principios de actuación pedagógica.

Hemos revisado distintas propuestas históricas para trabajar el volumen de la esfera. Cada una de ellas hace hincapié o resalta en sus demostraciones diferentes contenidos matemáticos que el profesorado puede aprovechar en función del currículo que quiera trabajar y según la coyuntura de aula. Este ejemplo nos ha mostrado un amplio abanico de encuadres, con diferentes grados de formalidad que confluyen en un mismo propósito, demostrar el volumen de la esfera. Entendemos que con este camino se evidencia la capacidad de la historia en la enseñanza de las matemáticas para desmontar la idea de que estas son una materia granítica que no evoluciona o que tan solo tiene un único enfoque.

Esta asunción de lo histórico como constructo pedagógico permite un aprendizaje más significativo (Rueda and Luis, 2017) y hace posible, a su vez, mejorar la predisposición del alumnado hacia las matemáticas. La importancia de la dimensión afectiva en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se ha demostrado ya en diferentes investigaciones, (Barragán, 2018), y en este trabajo aseveramos que el método genético también contribuye a evitar la llamada ansiedad matemática. Además de clarificar los contenidos desde distintos enfoques, el método genético nos muestra que los errores o dudas han formado parte de los grandes matemáticos y de sus avances, por lo que los estudiantes, en el caso necesario, podrán rebajar sus listones de autoexigencia y tolerar o entender que no es necesario la perfección para poder avanzar.

Es muy positivo, y más en las circunstancias actuales, el hecho de demostrar que nuestra sociedad occidental no es el centro ni la generadora de todo el conocimiento (Pallarès Piquer, 2019), ya que el conocimiento, en realidad, más bien es compartido por todas las culturas y no hay ninguna que siempre haya tenido una preponderancia sobre las otras. De hecho, resulta evidente que el apoyo, el reconocimiento y la colaboración entre las culturas genera un revulsivo positivo en el saber mutuo (Linares, 2018).

La necesidad de demostrar un mismo concepto de tantas formas distintas (y a lo largo de diferentes etapas históricas) nos muestra la influencia que los factores sociales y culturales tienen en la ciencia y la importancia de transmitir y recopilar el conocimiento (Alves et al., 2018; González, 2017). Asimismo, en las etapas en las que ya era conocida la fórmula del volumen de la esfera, el interés de conseguirla (utilizando las propias teorías y conocimientos matemáticos) nos revela que el empleo de las matemáticas no es estrictamente utilitario, es decir, la propia belleza de las matemáticas resulta ser motivo suficiente.

Para el profesorado, la utilización del método genético permitirá enriquecerse de una infinidad de ejemplos, actividades y perspectivas que han ido elaborándose a lo largo del tiempo. Ya nos apuntaba González (2004), que en la Historia de las Matemáticas el profesorado puede encontrar un medio de autoformación para la comprensión profunda de las Matemáticas y sus dificultades de transmisión, lo que permitirá optimizar el camino que conduce de la Enseñanza al Aprendizaje.

Hay multitud de estudios que demuestran la solvencia y las virtudes de utilizar la historia en la enseñanza de las matemáticas (Gómez Alfonso, 2018; Clark et al., 2016; Ozdemir et al., 2012; Karaduman, 2010; Jankvist, 2009b,a; Liu, 2003; Wilson and Chauvot, 2000; Fauvel and Van Maanen, 1997), y la aportación de este trabajo que ahora finaliza afianza la creencia de que los hechos del pasado pueden erigirse en elementos significativos y en procesos de influencia educativa que aumentan el carácter axiológico de las matemáticas como "asignatura". Así, pasado y presente constituyen el soporte de acción que sirve para desplegar lo que se quiere transmitir al alumnado y confiere entidad pedagógica a la compleja práctica profesional de enseñar matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, Maria Manuela, RIBEIRO, Jaime, and SIMÕES Fátima. 2018. Criação e aplicação de recursos educativos digitais com o universal design for learning na promoção da inclusão: investigação na aprendizagem da ferramenta book builder.

Fronteiras: Journal of Social, Technological and Environmental Science, 7(2):225–251.

BARRAGÁN, Sandra. 2018. Modelación con teoría de grafos para la unidimensionalidad de un instrumento de evaluación. **Interdisciplinaria: Revista de psicología y ciencias afines= journal of psychology and related sciences**, (1):7–33.

BERNAL, Martin. 1992. Animadversions on the origins of western science. **Isis**, 83(4):596–607.

BISHOP, Alan J, CLEMENTS, MA Ken, CLEMENTS, Ken, KEITEL, Christine, KILPATRICK, Jeremy, and LABORDE, Colette. 1996. **International handbook of mathematics education.** Springer Science & Business Media.

BOYER, Carl B and MERZBACH, Uta C. 2011**. A history of mathematics**. John Wiley & Sons.

CASTELLANOS, Dario. 1988. The ubiquitous π. **Mathematics Magazine**, 61(2):67– 98.

CLARK, Kathy, KJELDSEN, Tinne, Sebastian, SCHORCHT, TZANAKIS, Constantinos, and WANG, Xiaoqin. 2016. History of mathematics in mathematics education. recent developments. **History and Pedagogy of Mathematics**.

EDUWARDS, Charles Henry Jr. 2012. The historical development of the calculus. **Springer Science & Business Media.**

FAUVEL, John and VAN MAANEN, Johannes Arnoldus 2000. The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics: Discussion document for an icmi study (1997–2000). **Educational Studies in Mathematics**, 34(3):255– 259.

FAUVEL, John and VAN MAANEN, Johannes Arnoldus 2006**. *History in mathematics education: The ICMI study***. Springer Science & Business Media.

FERNÁNDEZ RODRÍGUEZ, Fernando. 1990. Enseñanza genética del cálculo infinitesimal. una aproximación a la lógica histórica de esta disciplina. **SCPM "Isaac Newton"**.

GALLARDO FRÍAS, Laura. 2017. Totalidad en arquitectura. reflexiones sobre la estética y la coexistencia de las cosas con el lugar que producen en nosotros una experiencia de totalidad. **Pensamiento**. **Revista de Investigación e Información Filosófica**, 73(277):923–942.

GARCÍA LOZANO, Juan Carlos. 2018.´Educación y modernidad en la sociedad civil colombiana. Encuentros. **Revista de Ciencias Humanas, Teoría Social y Pensamiento Crítico**, (08):27–50.

GÓMEZ ALFONSO, Bernardo. 2018. Uso de la historia en la educación matemática: El caso de los gemelos póstumos. **Matemáticas, Educación y Sociedad**, 1(1):11–21.

GONZÁLEZ, Miriam-Luisa. 2017. Maquinaria de punto: desarrollo y vigencia en el diseño actual. **Kepes**, 14(15).

GONZÁLEZ, Pedro Miguel. 2004. La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. **Suma**, 45:17– 28.

GRANGER, Gilles-Gaston. 1994. Formes, opérations, objets. **Vrin**.

GUTIÉRREZ-BARBA, Blanca Estela and DE LA LUZ VALDERRÁBANOALMEGUA, María. 2017. Aprendiendo del extra-currículo. aproximaciones desde el coloquio estudiantil. **CADMO**.

HE, Ji-Huan. 2004. Zu-geng's axiom vs cavalieri's theory. **Applied mathematics and computation**, 152(1):9–15.

HEATH, Thomas Little et al. 2002. **The works of Archimedes.** Courier Corporation.

HEATH, Thomas. 2007. **The Method of Archimedes, recently discovered by Heiberg: A supplement to the Works of Archimedes.** Cosimo, Inc.

HULTSCH, Friedrich Otto et al. 1878. **Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt,** volume 3. Apud Weidmannos.

JANKVIST, Uffe Thomas. 2009. A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. **Educational studies in Mathematics**, 71(3):235–261.

JANKVIST, Uffe Thomas. 2009. **Using history as a'goal'in mathematics education**, volume 464. IMFUFA, Institut for Natur, Systemer og Modeller, Roskilde Universitet.

KARADUMAN, Gulsah Batdal. 2010. A sample study for classroom teachers addressing the importance of utilizing history of math in math education. **Procedia-Social and Behavioral Sciences**, 2(2):2689–2693.

KIANG, Tao. 1972. An old chinese way of finding the volume of a sphere. **The Mathematical Gazette**, 56(396):88–91.

KNILL, Oliver and SLAVKOVSKY, Elizabeth. 2013. Thinking like archimedes with a 3d printer. **arXiv** preprint arXiv:1301.5027.

LAKATOS, Imre. 2015. **Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery.** Cambridge university press.

LESHER, James H. 2001. **Xenophanes of Colophon: fragments: a text and translation with a commentary**, volume 4. University of Toronto Press**.**

LINARES, Raúl. 2018. Realidad y significación. el giro semiótico como perspectiva y propuesta de ponderación epistémica. **Cinta de moebio**, (63):283–296.

LIU, Po-Hung. 2003. Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching**. Mathematics Teacher**, 96(6):416–421.

LURJE, Salomon J. 1948. **Archimedes.** Vienna: ”Neues Österreich”.

MATO-VÁZQUEZ, Dorinda, ESPIÑEIRA, Eva, and LÓPEZ-CHAO, Vicente A. 2017. Impacto del uso de estrategias metacognitivas en la enseñanza de las matemáticas. **Perfiles educativos**, 39(158):91–111.

MOSVOLD, Reidar. 2002. Genesis principles in mathematics education. Notodden: **Telemarksforsking Notodden**.

NETZ, Reviel. 2010. **The works of archimedes: Volume 1, the two books on the sphere and the cylinder: Translation and commentary**. Cambridge University Press.

OZDEMIR, Ahmet Sukru, GOKTEPE, Sevda, and KEPCEOGLU, Ibrahim. 2012. Using mathematics history to strengthen geometric proof skills. **Procedia-Social and Behavioral Sciences**, 46:1177–1181.

PALLARÈS PIQUER, Marc, CHIVA BARTOLL, Óscar, CABERO FAYOS, Ismael, and CARO SAMADA, Carmen. 2018. El valor educativo de la hermeneutica de Ernst Junger. **Utopía y Praxis Latinoamericana**, 23(S3):122–139.

PALLARÈS PIQUER, Marc. 2018. Recordando a freire en época de cambios: concientización y educación. **Revista electrónica de investigación educativa**, 20(2):126–136.

PALLARÈS PIQUER, Marc. 2019. Estructuras de acogida, progreso y sistema educativo. una aproximación a partir de la serie "The wire". **Arte, Individuo y Sociedad**, 31(2), 375-392.

PÉREZ PIÑA, Lorena, LÓPEZ GUTIÉRREZ, Carlos J, and ORTEGA CABALLERO, Manuel. 2017. Nuevas perspectivas metodológicas en el enfoque pedagógico de los procesos de enseñanza-aprendizaje en la educación escolar. **Publicaciones**, 46:91–105.

POINCARÉ, Henri. 1914. **Science and Method, translated by Francis Maitland.** Dover Publications.

RICHARDSON, Frank C and SUINN, Richard M. 1972. The mathematics anxiety rating scale: psychometric data. **Journal of counseling Psychology**, 19(6):551–554.

RODRÍGUEZ RODRÍGUEZ, Daniel, GUZMÁN ROSQUETE, Remedios, et al. 2018. Relación entre perfil motivacional y rendimiento académico en educación secundaria obligatoria. **Estudios sobre Educación**, 34:199–217.

RUEDA, Meza y LUIS, José. 2017. La formación de los maestros noveles en la guía de las escuelas: una preocupación de ayer y de hoy. **Revista Lasallista de Investigación**, 14(2):203–211.

SANCHIS, Gabriela R. 2016. Archimedes. method for computing areas and volumes. **Convergence**, 13.

SCHUBRING, Gert. 1978. **Das genetische Prinzip in der Mathematik Didaktik**. Klett-Cotta Typoscript. Stuttgart.

SIMMONS, George F. 2007. **Calculus gems: brief lives and memorable mathematics, volume 55**. Mathematical Association of America.

SIMMS, Dennis L. 1990. The trail for archimedes's tomb. **Journal of the Warburg and Courtauld Institutes**, 53:281–286.

SMITH, David E. 1958. **History of mathematics,** volume 429. Courier Corporation**.**

THOMAS, Ivor. 1957. **Selections illustrating the history of Greek mathematics: in two volumes. 1. From Thales to Euclid.** Harvard University Press.

VELILLA-JIMÉNEZ, Helbert E. 2018. Formas de matematización de la filosofía natural: Galileo y la redefinición sociocognitiva de sus matemáticas. **Estudios de Filosofía**, (57):59–93.

WILSON, Patricia S and CHAUVOT, Jennifer B. 2000. Who? how? what? a strategy for using history to teach mathematics. **Mathematics Teacher,** 93(8):642– 45.

UNIVERSIDAD
DEL ZULIA

opción
Revista de Ciencias Humanas y Sociales

Año 35, N° 90 (2019)

Esta revista fue editada en formato digital por el personal de la Oficina de Publicaciones Científicas de la Facultad Experimental de Ciencias, Universidad del Zulia.
Maracaibo - Venezuela

www.luz.edu.ve

www.serbi.luz.edu.ve

produccioncientifica.luz.edu.ve