Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia. Vol. 21, Nº 1, 59-66, 1998

A operational calculus for the fractional operator $B_{\rho,\alpha,\beta}$

J.A. Alamo and J. Rodríguez*

Dpto. de Matemática, Universidad de Las Palmas

**Dpto. de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna, 38271 La Laguna Tenerife, España*

Abstract

A convolution associated with the fractional operator $B_{\rho,\alpha,\beta} = t^{1-\alpha-\beta}D^{\rho}t^{\alpha}Dt^{\beta}$ is defined and its properties are investigated. Following a process similar to Mikusinski's, and operational calculus is developed and the operational rules obtained are used in solving some differential equations.

Key words: Fractional operators, Mikusinski operational calculus, Bessel operators, convolution, Algebra of operators.

Un cálculo operacional para el operador fraccionario $B_{\rho,\alpha,\beta}$

Resumen

Se define una convolución válida para el operador fraccionario $B_{\rho,\alpha,\beta} = t^{1-\alpha-\beta}D^{\rho}t^{\alpha}Dt^{\beta}$, que nos permite desarrollar un cálculo operacional siguiendo un proceso algebraico semejante al de Mikusinski y obteniendo reglas operacionales que son utilizadas en algunos ejemplos.

Palabras clave: Operadores fraccionarios, cálculo operacional de Mikusinski, operadores de Bessel, convolución, álgebra de operadores.

Introducción

En este trabajo siguiendo un proceso algebraico similar al empleado por J. Mikusinski [1] para el operador D, se desarrolla un cálculo operacional para el operador

$$B_{\rho,\alpha,\beta} = t^{1-\alpha-\beta}D^{\rho}t^{\alpha}Dt^{\beta}, \text{ con } \alpha+\beta > 0,\ \beta+\rho > 0,\ \rho > 0$$

donde comparece la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville D^{ρ} y siendo su operador inverso por la derecha el $L_{\rho,\alpha,\beta} = t^{-\beta}It^{-\alpha}I^{\rho}t^{\alpha+\beta-1}$.

El cálculo se reduce al estudiado por Ditkin-Proudnikov [2], cuando $\rho = 1, \alpha = 1, \beta = 0$, al del operador $B_{\nu} = t^{-\nu}Dt^{\nu+1}D$ estudiado por E. Koh [3] cuando $\rho = 1, \alpha = \nu+1, \beta = 0$ y al dado por J. Rodríguez en [4] cuando $\rho = 1$. Asimismo constituye una extensión de los operadores $B_{\rho,\nu} = t^{-\upsilon}D^{\rho}t^{\nu+1}D$ y $B_{\upsilon}^{(\rho)} = D^{\rho}t^{\nu+1}Dt^{-\nu}$ estudiados por J.A. Alamo y J. Rodríguez en [5].

En este campo destacan los trabajos realizados por I.H. Dimovki [6], J.J. Betancor y J.A. Barrios [7] para el operador del tipo Bessel

$$B = t^{\alpha_0}Dt^{\alpha_1}D\cdots Dt^{\alpha_n}, \quad (\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n < n)$$

y por V. Kiryakova [8] y J.A. Alamo y J. Rodríguez en [9] para el operador fraccionario modificado de Erdélyi-Kober, $\Delta_{(\delta)} = t^{-\beta\gamma}I_{\beta}^{\delta}t^{\beta\gamma}$ entre otros autores.

Para definir la convolución del operador $B_{\rho,\alpha,\beta}$ nos servirá de ayuda el operador integral de Riemann-Liouville:

$$I^{\upsilon}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\upsilon)}\int_0^t (t-\xi)^{\upsilon-1}f(\xi)d\xi \quad (\upsilon > 0) \tag{1}$$

siendo f una función localmente integrable en $[0,\infty)$.

La derivada fraccionaria de orden $\nu > 0$ de una función $f \in C^n([0,\infty))$ se define, con la ayuda de (1) [10], mediante

$$D^{\nu} f = D^n I^{n-\nu} f \qquad (n-1 < \nu \le n). \tag{2}$$

El operador de integración fraccionaria generalizado de Riemann-Liouville estudiado en [11] viene dado por:

$$I_{\beta}^{\delta} f(t) = \frac{\beta}{\Gamma(\delta)} \int_0^t (t^{\beta} - \xi^{\beta})^{\delta-1} \xi^{\beta-1} f(\xi) d\xi. \tag{3}$$

siendo $\delta,\beta > 0$ y f una función localmente integrable en $[0,\infty)$.

Definición 1:

Sean $\beta > 0$ y $f \in \mathcal{D}([0,\infty))$. Se define el operador D_{β} mediante

$$D_{\beta} f(t) = \frac{d}{dt^{\beta}} f(t) = \beta^{-1} t^{1-\beta} Df(t). \tag{4}$$

Definición 2:

Sean $\rho > 0$, con $n-1 < \rho \le n$ y $f \in \mathcal{D}^n$. Entonces, se define

$$D_{\beta}^{\rho} f = D_{\beta}^{n} I_{\beta}^{n-\rho} f. \tag{5}$$

Definición 3:

Sea $\beta \in \mathbb{R}^+$ y sea $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$. Definimos el operador potencia del argumento mediante

$$T^{\beta} f(t) = f(t^{\beta}). \tag{6}$$

Los operadores D^{ρ}, I^{ρ}, D_{β}^{ρ}, I_{β}^{ρ} están relacionados por las expresiones que siguen [12]

$$D^{\rho} = T^{\frac{1}{\beta}} D_{\beta}^{\rho} T^{\beta} \quad , \quad I^{\rho} = T^{\frac{1}{\beta}} I_{\beta}^{\rho} T^{\beta} \tag{7}$$

$$D_{\beta}^{\rho} = T^{\beta} D^{\rho} T^{\frac{1}{\beta}} \quad , \quad I_{\beta}^{\rho} = T^{\beta} I^{\rho} T^{\frac{1}{\beta}}. \tag{8}$$

Por último, veamos que el operador $B_{\rho,\alpha,\beta}$ también adopta la forma

$$B_{\rho,\alpha,\beta} = t^{1-\beta-\rho} D t^{\rho-\alpha+1} D^{\rho} t^{\alpha+\beta-1}. \tag{9}$$

Para ello, como $L_{\rho,\alpha,\beta}$ es inverso por la derecha de $B_{\rho,\alpha,\beta}$ si se aplica la segunda Ley de índices (véase [13]) a las expresiones a continuación señaladas, se tiene

$$L_{\rho,\alpha,\beta} = (B_{\rho,\alpha,\beta})^{-1} =$$

$$t^{-\beta} t^{1-\alpha} \underbrace{t^{\alpha-1} I t}^{-\alpha} I^{\rho} t^{\alpha+\beta-1} = t^{1-\alpha-\beta} I^{\alpha} t^{-1} I^{1-\alpha} I^{\rho} t^{\alpha+\beta-1} =$$

$$t^{1-\alpha-\beta} I^{\alpha} t^{-1} I^{1-\alpha+\rho} t^{\alpha+\beta-1} = t^{1-\alpha-\beta} \underbrace{I^{\alpha} t^{-1} I^{1-\alpha+\rho} t}^{\alpha-\rho} t^{\rho+\beta-1} =$$

$$t^{1-\alpha-\beta} I^{\alpha} I^{\rho-\alpha} t^{\alpha-\rho-1} I t^{\beta+\rho-1} = t^{1-\alpha-\beta} I^{\rho} t^{\alpha-\rho-1} I t^{\beta+\rho-1}.$$

Invirtiendo resulta (9).

Extensión de $(C_{\rho},+,\star)$ a su cuerpo de fracciones

Dentro de las funciones de argumento positivo y valores complejos

$$f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$$

consideraremos el conjunto C_{ρ} de series de potencias generalizadas definido por

$$C_{\rho} = \left\{ f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n\rho} / \text{absolutamente convergente} \right.$$
$$\left. \text{en compactos de } [0,\infty) \right\}. \tag{10}$$

Es fácil comprobar que $(C_{\rho}, +, \cdot\mathbb{C})$ es un espacio vectorial.

Definición 4:

Sean $f, g \in C_{\rho}$. Definimos la operación $\star$, a la que llamamos convolución, por

$$\star : C_{\rho} \times C_{\rho} \longrightarrow C_{\rho}$$

$$(f \star g)(t) = \frac{t^{-\beta} D_{\rho}^{\frac{\beta}{\rho}} t^{1-\rho} D t^{\rho-\alpha+\beta+1} D^{\alpha+\beta}}{\rho \Gamma(\alpha+\beta) \Gamma\left(\frac{\beta+\rho}{\rho}\right)} \cdot$$
$$\int_0^t (t-\xi)^{\alpha+\beta-1} \xi^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 \eta^{\frac{\beta}{\rho}} (1-\eta)^{\frac{\beta}{\rho}} f(\xi \eta^{\frac{1}{\rho}}).$$

$$g\left[(1-\eta)^{\frac{1}{\rho}}(t-\xi)\right]d\eta d\xi\,, \tag{11}$$

con $\alpha+\beta > 0$, $\beta+\rho > 0$, $\rho > 0$.

En el caso de funciones potenciales de argumento t^{ρ} la convolución vendrá dada por

$$t^{p\rho} \star t^{q\rho} = \frac{\Gamma\left(\frac{p\rho+\beta+\rho}{\rho}\right)\Gamma\left(\frac{q\rho+\beta+\rho}{\rho}\right)\Gamma(p\rho+\alpha+\beta)\Gamma(q\rho+\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma\left(\frac{\beta+\rho}{\rho}\right)\Gamma(\alpha+\beta+p\rho+q\rho)\Gamma\left(\frac{p\rho+q\rho+\beta+\rho}{\rho}\right)}t^{(p+q)\rho}. \tag{12}$$

En el siguiente aserto recopilamos las principales propiedades de esta convolución.

Proposición 1

Dadas $f,g,h \in C_{\rho}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene:

a) $f \star g \in C_{\rho}$

b) $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$

c) $f \star g = g \star f$

d) $\lambda \star f = \lambda f$

e) $f \star (g+h) = f \star g + f \star h$

f) $f \star g = 0 \Rightarrow f = 0$ ó $g = 0$

g) $L_{\rho,\alpha,\beta}(f \star g) = (L_{\rho,\alpha,\beta} f) \star g$.

A continuación se proporcionan esquemas de las demostraciones de las anteriores propiedades y se comentan algunas de ellas.

a) La convolución $\star$ es cerrada en C_{ρ}. Primeramente por (12) se observa que es cerrada para potencias. En general se tiene

$$(f \star g)(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k\rho}\right) \star \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j t^{j\rho}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n\rho}$$

con

$$c_n = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\Gamma(i\rho+\alpha+\beta)\Gamma\left[(n-i)\rho+\alpha+\beta\right]\Gamma\left(\frac{(n-i)\rho+\beta+\rho}{\rho}\right)\Gamma\left(\frac{i\rho+\beta+\rho}{\rho}\right)}{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma\left(\frac{\beta+\rho}{\rho}\right)\Gamma(n\rho+\alpha+\beta)\Gamma\left(\frac{n\rho+\beta+\rho}{\rho}\right)}. \tag{13}$$

b) La propiedad asociativa se demuestra para potencias, con la ayuda de (12), comprobando que al desarrollar ambos miembros se tiene la misma expresión. La extensión a C_{ρ} es obvia.

c) Para verificar la conmutatividad efectuamos en (11) los cambios $x = (t-\xi)$ e $y = (1-\eta)$. Se obtiene así:

$$\frac{t^{-\beta}D_{\rho}^{\frac{\beta}{\rho}}t^{1-\rho}Dt^{\rho-\alpha+\beta+1}D^{\alpha+\beta}}{\rho\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma\left(\frac{\beta+\rho}{\rho}\right)}\int_0^t (t-x)^{\alpha+\beta-1}x^{\alpha+\beta-1}$$

$$\int_0^1 y^{\frac{\beta}{\rho}}(1-y)^{\frac{\beta}{\rho}}g(xy^{\frac{1}{\rho}})f\left[(1-y)^{\frac{1}{\rho}}(t-x)\right]dydx\,.$$

Esta expresión no es otra cosa que el desarrollo de $g \star f$.

d) El operador $\star$ conserva las constantes. En efecto, si en (11) se sustituye $g(t)$ por λ, se efectúa el cambio de variables $x = \xi\eta^{\frac{1}{\rho}}$ y se tiene en cuenta (4) y (5), resulta

$$\lambda t^{-\beta}D^{\frac{\beta}{\rho}}t^{1-\rho}Dt^{\rho-\alpha+\beta+1}D^{\alpha+\beta}I^{\alpha+\beta}t^{\alpha-\beta-\rho-1}It^{\rho-1}I^{\frac{\beta}{\rho}}t^{\beta}f(t)\,,$$

expresión que al simplificar se reduce a $\lambda f(t)$. Por esta propiedad y para el valor $\lambda = 1$, queda patente que la unidad actúa como elemento neutro de la convolución.

e) La propiedad distributiva es consecuencia de la linealidad que verifica la integral.

f) Para ver la integridad se parte de que $f \star g = 0$. Consideraciones sobre el grado del polinomio del primer miembro permiten escribir que

$$\int_0^t (t-\xi)^{\alpha+\beta-1}\xi^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 \eta^{\frac{\beta}{\rho}}(1-\eta)^{\frac{\beta}{\rho}}f(\xi\eta^{\frac{1}{\rho}})$$

$$g\left[(1-\eta)^{\frac{1}{\rho}}(t-\xi)\right]d\eta d\xi = 0\,.$$

Los cambios

$$\eta = \frac{y^{\rho}}{\tau^{\rho}}, \quad \xi = z\tau\,, \quad u = \frac{t}{\tau}$$

conducen a la expresión

$$\rho\int_0^u\int_0^{\tau}(u-z)^{\alpha+\beta-1}z^{\alpha+\beta-1}\tau^{2\alpha-\rho-1}y^{\beta+\rho-1}\,.$$

$$(\tau^{\rho}-y^{\rho})^{\frac{\beta}{\rho}}f(zy)g\left[(\tau^{\rho}-y^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}(u-z)\right]dydz\,,$$

donde es aplicable el teorema de Titchmarsh-Ryll-Nardzewski que permite concluir que

$$(u-z)^{\alpha+\beta-1}(\tau^{\rho}-y^{\rho})^{\frac{\beta}{\rho}}g\left[(\tau^{\rho}-y^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}(u-z)\right]=0 \quad ó$$

$$z^{\alpha+\beta-1}y^{\beta+\rho-1}f(yz)=0\,,$$

por lo que $f = 0$ ó $g = 0$.

g) Veamos antes como actúa el operador inverso sobre la función de C_{ρ}

$$L_{\rho,\alpha,\beta}f(t) = t^{-\beta}It^{-\alpha}I^{\rho}t^{\alpha+\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}a_k t^{k\rho} =$$

$$t^{-\beta}It^{-\alpha}I^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}a_k t^{k\rho+\alpha+\beta-1} =$$

$$t^{-\beta}I\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k\Gamma(k\rho+\alpha+\beta)}{\Gamma(k\rho+\alpha+\beta+\rho)}t^{k\rho+\beta+\rho-1} = \tag{14}$$

$$\sum_{k=o}^{\infty}\frac{a_k\Gamma(k\rho+\alpha+\beta)}{(k\rho+\beta+\rho)\Gamma(k\rho+\alpha+\beta+\rho)}t^{k\rho+\rho}.$$

lo que nos permite la demostración de g) por aplicación directa de (12) y (14). Esta propiedad, denominada de Dimovski, es un test que nos permite comprobar si la convolución es adecuada para el operador considerado.

Establecidas estas propiedades podemos enunciar:

Proposición 2

(C_{ρ}, +, ★) tiene estructura de anillo conmutativo unitario sin divisores de cero.

La anterior proposición nos permite extender C_{ρ} a su cuerpo de fracciones. Para ello se define en $C_{\rho} \times (C_{\rho} - \{0\})$ la relación ~ por

$$(f,g) \sim (h,k) \Leftrightarrow f \star k = g \star h \tag{15}$$

que es de equivalencia. Denotamos por $\mathcal{M}_{\rho,\alpha,\beta} = C_{\rho} \times (C_{\rho} - \{0\})/\sim$. Siguiendo a Mikusinski llamamos a los elementos de $\mathcal{M}_{\rho,\alpha,\beta}$ operadores, designados a la clase del par (f,g) (por f/g).

En $\mathcal{M}_{\rho,\alpha,\beta}$ se definen las operaciones suma, producto y producto por un escalar por

$$\frac{f}{g}+\frac{h}{k}=\frac{f\star k+g\star h}{g\star k}$$

$$\frac{f}{g}\cdot\frac{h}{k}=\frac{f\star h}{g\star k}$$

$$\lambda\frac{f}{g}=\frac{\lambda f}{g}$$

compatibles con la relación ~.

Con estas operaciones $\mathcal{M}_{\rho,\alpha,\beta}$ es un álgebra. Hay una parte $M'_{\rho,\alpha,\beta}$ de $\mathcal{M}_{\rho,\alpha,\beta}$ con elementos de la forma $f/1$ isomorfa con el anillo C_{ρ} mediante la aplicación

$$\mathcal{M}_{\rho,\alpha,\beta} \quad M'_{\rho,\alpha,\beta} \longrightarrow C_{\rho} \tag{16}$$

$$\frac{f}{1} \longrightarrow f$$

Un cálculo operacional

Veamos primeramente que el operador $L_{\rho,\alpha,\beta}$ admite representación como elemento de C_{ρ} y por tanto de $\mathcal{M}_{\rho,\alpha,\beta}$ que le incluye.

Proposición 3

Si $f \in C_{\rho}$ y $k \in N$, entonces

a) $$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(\beta+\rho)\Gamma(\alpha+\beta+\rho)}t^{\rho}\star f(t) = L_{\rho,\alpha,\beta}f(t) \tag{17}$$

b)

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma\left(\frac{\beta+\rho}{\rho}\right)}{\rho^{k}\Gamma(\alpha+\beta+\rho)\Gamma\left(\frac{k\rho+\beta+\rho}{\rho}\right)}t^{k\rho}\star f(t) = L^{N}_{\rho,\alpha,\beta}f(t).$$

Demostración

a) Puesto que $\frac{L_{\rho,\alpha,\beta}f}{f}=\frac{L_{\rho,\alpha,\beta}g}{g}$ para $\forall\, f,g \in C_{\rho}$, $f,g \neq 0$, el elemento $\frac{L_{\rho,\alpha,\beta}f}{f}$ es independiente de f y por ello lo identificamos con el operador $L_{\rho,\alpha,\beta}$. Por tanto como:

$$\mathcal{M}_{\rho,\alpha,\beta} \longrightarrow C_{\rho}$$

$$\frac{L_{\rho,\alpha,\beta}1}{1} \longrightarrow L_{\rho,\alpha,\beta}1 = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(\beta+\rho)\Gamma(\alpha+\beta+\rho)} t^{\rho},$$

podemos identificar

$$L_{\rho,\alpha,\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(\beta+\rho)\Gamma(\alpha+\beta+\rho)} t^{\rho}.$$

b) Basta proceder por inducción sobre k.

Asimismo los inversos de los anteriores operadores (que denotaremos por V y V^k) también pertenecen a $\mathcal{M}_{\rho,\alpha,\beta}$. Tenemos, pues que

a) $$V = \frac{(\beta+\rho)\Gamma(\alpha+\beta+\rho)}{\Gamma(\alpha+\beta)t^{\rho}} \tag{18}$$

b) $$V^k = \frac{\rho^k\Gamma(\alpha+\beta+\rho)\Gamma\left(\frac{k\rho+\beta+\rho}{\rho}\right)}{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma\left(\frac{\beta+\rho}{\rho}\right)t^{k\rho}}$$

Composiciones de los Operadores $L_{\rho\alpha\beta}$ y $B_{\rho\alpha\beta}$

Es fácil comprobar que

$$B_{\rho,\alpha,\beta}L_{\rho,\alpha,\beta}f(t) = f(t).$$

Esto no sucede si conmutamos los operadores, pues

$$L_{\rho,\alpha,\beta}B_{\rho,\alpha,\beta}f(t) = t^{-\beta}It^{-\alpha}I^{\rho}t^{\alpha+\beta-1}t^{1-\alpha-\beta}D^{\rho}t^{\alpha}Dt^{\beta}f(t) = t^{-\beta}It^{-\alpha}I^{\rho}D^{\rho}t^{\alpha}Dt^{\beta}f(t),$$

de aquí, por [10], con n-1 < $\rho \leq n$, la anterior expresión deviene

$$t^{-\beta}It^{-\alpha}\left[t^{\alpha}Dt^{\beta}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(D^kI^{n-\rho}t^{\alpha}Dt^{\beta}f)(0)}{\Gamma(\rho+1-n+k)}t^{k+\rho-n}\right] =$$

$$t^{-\beta}IDt^{\beta}f(t) - t^{-\beta}I\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(D^kI^{n-\rho}t^{\alpha}Dt^{\beta}f)(0)}{\Gamma(\rho+1-n+k)}t^{k+\rho-n-\alpha} =$$

$$t^{-\beta}\left[t^{\beta}f(t) - \left(t^{\beta}f\right)(0)\right] - t^{-\beta}\cdot \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(D^kI^{n-\rho}t^{\alpha}Dt^{\beta}f)(0)}{(k+\rho-n-\alpha+1)\Gamma(\rho+1-n+k)}t^{k+\rho-n-\alpha+1} =$$

$$f(t) - t^{-\beta}\left(t^{\beta}f\right)(0) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(D^kI^{n-\rho}t^{\alpha}Dt^{\beta}f)(0)}{(k+\rho-n-\alpha+1)\Gamma(\rho+1-n+k)}t^{k+\rho-n-\alpha-\beta+1}.$$

Hemos establecido así

Proposición 4

Si n-1 < $\rho \leq n$ y $f \in C^{n+1}$ ([0,∞)) se verifica

$$L^{\rho,\alpha,\beta}B^{\rho,\alpha,\beta}f(t) = f(t) - t^{-\beta}\left(t^{\beta}f\right)(0) - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(D^iI^{n-\rho}t^{\alpha}Dt^{\beta}f)(0)}{(i+\rho-n-\alpha+1)\Gamma(\rho+1-n+i)}t^{i+\rho-n-\alpha-\beta+1} \tag{19}$$

En caso que $g(t) = t^{-\beta}f(t) = t^{-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}a_kt^{k\rho}$ se tiene que

$$D^iI^{n-\rho}t^{\alpha}Dt^{\beta}t^{-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}a_kt^{k\rho} = D^iI^{n-\rho}\sum_{k=1}^{\infty}k\rho a_kt^{k\rho+\alpha-1} =$$

$$D^i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\rho\Gamma(k\rho+\alpha)a_k}{\Gamma(k\rho+n+\alpha-\rho)}t^{k\rho+n-\rho+\alpha-1},$$

de donde, para $i = 0,1..., n - 1$, se verifica

$$(D^iI^{n-\rho}t^{\alpha}Dt^{\beta}t^{-\beta}f)(0) = 0$$

y, por tanto, el sumatorio de la fórmula (19) es nulo, resultando que recogemos en la siguiente

Proposición 5

Si $f \in C_{\rho}$, entonces

$$L_{\rho,\alpha,\beta}B_{\rho,\alpha,\beta}t^{-\beta}f(t) = t^{-\beta}f(t) - t^{-\beta}f(0). \tag{20}$$

Teniendo como objetivo obtener algunas reglas operacionales, introducimos las nuevas funciones que siguen:

$$C^{\rho}_{\alpha-1,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma\left(\frac{\beta+\rho}{\rho}\right)}{\Gamma(\alpha+\beta+k\rho)\Gamma\left(\frac{\beta+k\rho+\rho}{\rho}\right)}t^{k\rho} \tag{21}$$

$$E^{\rho}_{\alpha-1,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma\left(\frac{\beta+\rho}{\rho}\right)}{\Gamma(\alpha+\beta+k\rho)\Gamma\left(\frac{\beta+k\rho+\rho}{\rho}\right)} t^{k\rho} \quad (22)$$

Obsérvese que para $\rho=1$, $\beta=0$, las funciones $C^{\rho}_{\alpha-1,\beta}(t)$ y $E^{\rho}_{\alpha-1,\beta}(t)$ se reducen a las funciones $\Gamma(\alpha)C_{\alpha-1}(t)$ y $\Gamma(\alpha)E_{\alpha-1}(t)$, siendo $C_{\alpha-1}(t)$ la función denominada de Bessel-Clifford de primera especie y $E_{\alpha-1}(t)$ la modificada o hiperbólica de primera especie, estudiadas por N. Hayek en [14].

Proposición 6

Sea la función de Wright

$$J^{\rho}_{\alpha-1}(t^{\rho}) = \Phi(\rho,\alpha;t^{\rho}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k\rho}}{k!\,\Gamma(k\rho+\alpha)}\,. \quad (23)$$

En $[0,\infty)$ *se verifica formalmente que*

$$t^{-\beta} \bigstar C^{\rho}_{\alpha-1,\beta}(t^{\rho}) = \Gamma(\alpha)t^{-\beta}J^{\rho}_{\alpha-1}(-t^{\rho}) \quad (24)$$

$$t^{-\beta} \bigstar E^{\rho}_{\alpha-1,\beta}(t^{\rho}) = \Gamma(\alpha)t^{-\beta}J^{\rho}_{\alpha-1}(t^{\rho})\,. \quad (25)$$

Lo que se comprueba por aplicación directa de (12)

A continuación probaremos que funciones obtenidas al modificar la función de Wright satisfacen ecuaciones diferenciales donde comparece el operador que estudiamos.

Proposición 7

Sea $a>0$, *entonces las ecuaciones diferenciales*

$$(B_{\rho,\alpha,\beta} + \rho a^{\rho})f(t) = 0 \quad (26)$$

$$(B_{\rho,\alpha,\beta} - \rho a^{\rho})f(t) = 0 \quad (27)$$

son satisfechas respectivamente por

$$y_1(t) = t^{-\beta}J^{\rho}_{\alpha-1}\left[-(at)^{\rho}\right] = t^{-\beta}\Phi\left[\rho,\alpha;-(at)^{\rho}\right] \quad (28)$$

$$y_2(t) = t^{-\beta}J^{\rho}_{\alpha-1}\left[(at)^{\rho}\right] = t^{-\beta}\Phi\left[\rho,\alpha;(at)^{\rho}\right]. \quad (29)$$

Demostración:

$$B_{\rho,\alpha,\beta}t^{-\beta}\Phi\left[\rho,\alpha;-(at)^{\rho}\right] =$$

$$t^{1-\alpha-\beta}D^{\rho}t^{\alpha}Dt^{\beta}\left(t^{-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(at)^{n\rho}}{n!\,\Gamma(n\rho+\alpha)}\right) =$$

$$t^{1-\alpha-\beta}D^{\rho}t^{\alpha}D\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{n\rho}t^{n\rho}}{n!\,\Gamma(n\rho+\alpha)}\right) =$$

$$a^{\rho}t^{1-\alpha-\beta}D^{\rho}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n\rho a^{(n-1)\rho}t^{n\rho+\alpha-1}}{n!\,\Gamma(n\rho+\alpha)}\right) =$$

$$a^{\rho}t^{1-\alpha-\beta}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\rho a^{(n-1)\rho}t^{(n-1)\rho+\alpha-1}}{(n-1)!\,\Gamma\left[(n-1)\rho+\alpha\right]}\right) =$$

$$-\rho a^{\rho}t^{-\beta}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(at)^{k\rho}}{k!\,\Gamma(k\rho+\alpha)}\right).$$

De igual modo, se procede para (29).

Reglas Operacionales

Haciendo uso de los resultados de la sección anterior, obtendremos algunas reglas operacionales que nos serán de utilidad para resolver ecuaciones diferenciales donde figura el operador que nos ocupa.

Partiendo de (20) y operando ambos miembros con V (véase (18)), se tiene

$$B_{\rho,\alpha,\beta}t^{-\beta}f(t) = V\cdot t^{-\beta}f(t) - f(0)t^{-\beta}\cdot V\,. \quad (30)$$

Haciendo $f(t) = J^{\rho}_{\alpha-1}\left[-(at)^{\rho}\right]$, teniendo en cuenta (26) y que $J^{\rho}_{\alpha-1}(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}$, se obtiene

$$-\rho a^{\rho}t^{-\beta}J^{\rho}_{\alpha-1}\left[-(at)^{\rho}\right] = V\cdot t^{-\beta}J^{\rho}_{\alpha-1}\left[-(at)^{\rho}\right] - \frac{t^{-\beta}\cdot V}{\Gamma(\alpha)}$$

y, agrupando, se llega a

$$(V+\rho a^{\rho})\cdot t^{-\beta}J^{\rho}_{\alpha-1}\left[-(at)^{\rho}\right] = \frac{t^{-\beta}\cdot V}{\Gamma(\alpha)}\,,$$

finalmente, por (24)

$$\frac{(V+\rho a^{\rho})\cdot t^{-\beta}\cdot C^{\rho}_{\alpha-1,\beta}\left[(at)^{\rho}\right]}{\Gamma(\alpha)} = \frac{t^{-\beta}\cdot V}{\Gamma(\alpha)}\,,$$

de donde se deriva la primera de las siguientes reglas operacionales

a) $\dfrac{V}{V+\rho a^\rho} = C^\rho_{\alpha-1,\beta}\left[(at)^\rho\right]$

De forma análoga a la demostración de a) pero sustituyendo $f(t)$ por $J^\rho_{\alpha-1}\left[(at)^\rho\right]$ y teniendo en cuenta (27) y (25) se obtiene

b) $\dfrac{V}{V-\rho a^\rho} = E^\rho_{\alpha-1,\beta}\left[(at)^\rho\right]$

Si se suman ordenadamente a) y b), llegamos a

c) $\dfrac{V^2}{V^2-\rho^2 a^{2\rho}} = \dfrac{1}{2}\left(C^\rho_{\alpha-1,\beta}\left[(at)^\rho\right] + E^\rho_{\alpha-1,\beta}\left[(at)^\rho\right]\right)$

Si se restan a) y b), se concluye que

d) $\dfrac{V}{V^2-\rho^2 a^{2\rho}} = \dfrac{1}{2\rho a^\rho}\left(C^\rho_{\alpha-1,\beta}\left[(at)^\rho\right] - E^\rho_{\alpha-1,\beta}\left[(at)^\rho\right]\right)$

Al realizar b) -1 se deduce que

e) $\dfrac{1}{V-\rho a^\rho} = \dfrac{1}{\rho a^\rho}\left(E^\rho_{\alpha-1,\beta}\left[(at)^\rho\right] - 1\right)$

Si se efectúa 1-a) resulta

f) $\dfrac{1}{V+\rho a^\rho} = \dfrac{1}{\rho a^\rho}\left(1 - C^\rho_{\alpha-1,\beta}\left[(at)^\rho\right]\right)$

Aplicaciones

Se usará aquí el cálculo operacional desarrollado anteriormente para resolver dos ecuaciones diferenciales que involucran al operador $B_{\rho,\alpha,\beta}$.

I) Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} aB_{\rho,\alpha,\beta}y_1(t) + bB_{\rho,\alpha,\beta}y_2(t) &= f_1(t)\\ cB_{\rho,\alpha,\beta}y_1(t) + dB_{\rho,\alpha,\beta}y_2(t) &= f_2(t)\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tal que $\Delta = ad-bc \neq 0$. f_i, $i=1,2$ son miembros de C_ρ e y_i, son funciones desconocidas que pertenecen a C_ρ, y que verifican $\lim\limits_{t\to 0} t^\beta y_i(t) = 0$, $i = 1,2$ y $\lim\limits_{t\to 0} D^k I^{n-\rho} t^\alpha D t^\beta y_i(t) = 0$ $i = 1,2$ $k = 0,1,2,\ldots,n-1$.

En virtud de (19) el sistema (31) puede escribirse como

$$\left.\begin{aligned} aVy_1(t) + bVy_2(t) &= f_1(t)\\ cVy_1(t) + dVy_2(t) &= f_2(t)\end{aligned}\right\}$$

Por lo tanto la solución general de (31) es:

$$y_1 = \frac{df_1(t) - bf_2(t)}{\Delta}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(\beta+\rho)\Gamma(\alpha+\beta+\rho)}t^\rho$$

$$y_2 = \frac{af_2(t) - cf_1(t)}{\Delta}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(\beta+\rho)\Gamma(\alpha+\beta+\rho)}t^\rho.$$

II) Consideremos la ecuación en derivadas parciales de orden fraccionario

$$B_{\rho,\alpha,\beta}u(x,t) - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (n-1<\rho<n) \tag{32}$$

$$0<x<l \quad 0<t<\infty$$

con las condiciones:

a)
$$\left.\begin{aligned} &\lim_{t\to 0} t^\beta u(x,t) = 0\\ &\lim_{t\to 0} D^k I^{n-\rho} t^\alpha D t^\beta u(x,t) = 0, \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1\end{aligned}\right. \tag{33}$$

b)
$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = f(t)\\ &\lim_{x\to l}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0\end{aligned} \tag{34}$$

en virtud de (19) y (33), tenemos

$$Vu(x,t) - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \tag{35}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = f(t) \tag{36}$$

$$\lim_{x\to l}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0 \tag{37}$$

resolviendo (35) como una ecuación diferencial ordinaria en la variable x, seguimos de las condiciones (36) y (37) que:

$$u(x,t) = -f(t)\cdot\frac{\mathrm{ch}\left[(l-x)\sqrt{V}\right]}{\sqrt{V}\mathrm{sh}(l\sqrt{V})}.$$

Ahora, aplicando la transformada de Fourier finita, inferimos que

$$u(x,t) = -\frac{f(t)}{2l}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\pi n x}{l}} \frac{2}{V+\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}$$

y, llamando

$$a = \rho\left[\frac{1}{\rho^{\frac{1}{\rho}}}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^{\frac{2}{\rho}}\right]^{\rho},$$

se tiene finalmente que

$$u(x,t) = \begin{cases} -\dfrac{f(t)}{l}\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\pi n x}{l}} \dfrac{a}{a(V+a)} & \text{si } n \neq 0 \\ -\dfrac{f(t)}{l}\dfrac{1}{V} & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{l}\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\pi n x}{l}} \dfrac{f(t)}{a}\cdot\left(1 - C^{l}_{\alpha-1,\beta}[(at)^{\rho}]\right) & \text{si } n \neq 0 \\ -\dfrac{f(t)}{l}\cdot\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(\beta+\rho)\Gamma(\alpha+\beta+\rho)}t^{\rho} & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Referencias Bibliográficas

1. J.MIKUSINSKI. *Operational calculus*. Pergamon, (1959)
2. V.A. DITKIN y A.P. PRUDNIKOV. *Integral transforms and operational calculus*. Pergamon Press, New York, (1965).
3. E.L. KOH. *A Mikusinski calculus for the operator* B . Proc. Diff. Eq., Springer-Verlag, Lect. Notes 564 (1976) 291-300.
4. J. RODRÍGUEZ. *Associated operational calculus for a Bessel-Clifford operator*. Jnanabha, Vol. 20 (1990) 81-91.
5. J.A. ALAMO y RODRÍGUEZ. *An Operational Calculus for the Operator* B and B . Jour. Inst. Math & Comp, Sci (Comp. Sc Sers) Vol. 5, No. 2. (1994). 187-200.
6. I.H. DIMOVSKI. *Foundations of operational calculi for the Bessel type differential operator*. Serdica, Bulgaricae Mathematicae Publicationes, 1 (1975) 51-63.
7. J.J. BETANCOR and J.A. BARRIOS.- *Operational calculus for the generalized Bessel type operator*. Simon Stevin. A Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics. Volume 66, Number 1-2, (1992) 89-98.
8. V. KIRYAKOVA. *Convolutions of Erdélyi-Kober fractional integration operators*. Complex Analysis and applications'87, Sofia, (1989) 273-283.
9. J.A. ALAMO y J. RODRÍGUEZ. *Operational Calculus for Modified Erdélyi-Kober Operators*. SERDICA - Bulgaricae mathematicae publicationes 20 (1994). 351-363.
10. K.S. MILLER AND B. ROSS. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. A Wiley-Interscience publication. New York. (1993).
11. A.C: MCBRIDE.- *Fractional calculus and integral transforms of generalized functions*. Ed. Pitman Adv. Publ. Program., London, (1979).
12. J.A. ALAMO y J. RODRÍGUEZ. *Cálculo operacional de Mikusinski para el operador de Riemann-Liouville y su generalizado*. Rev. Acad. Canar. Cien. V (Núm. 1), (1993) 31-43.
13. A. ERDELYI. *Fractional Integral of generalized functions*. J. Australian Math. Soc.14 (1972), 30-37. [14] N. HAYEK.- *Estudios de la ecuación diferencial xy y sus aplicaciones*. Collect. Math. XVIII, 1-2 (1966-67) 57-114.

   N. HAYEK. *Estudios de la ecuación diferencial* $xy'' + (v+1)y' + y = 0$ *y sus aplicaciones*. Collect. Math. XVIII, 1-2 (1966-67) 57-114.
14. S.B. Yakubovich and Yu F. Luchko. *The Hypergeometric Approach to the Integral Transforms and Convolutions*. Ser. Mathematics and Its Applications, Vol. 287 Kluwers (1994).

Recibido el 27 de Junio de 1995
En forma revisada el 23 de Octubre de 1995